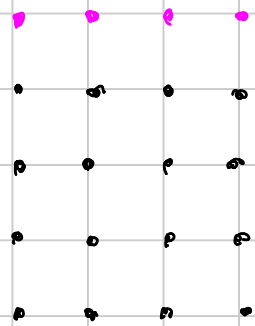
WINTER CAMP 2019 - COMBINATORIA

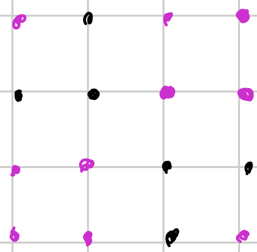
Note Title 1/28/2019

$\boxed{C4}$ Griglia estesa indefinitamente
All'inizio N caselle sono segnate
Possiamo segnare una nuova casella se nella sua riga e colonna ci sono già $\geq K$ caselle segnate
Qual è il minimo N per cui possiamo segnare qualunque casella?

1ª osservazione: un quadrato $k \times k$ funziona
$\Rightarrow N \leq k^2$



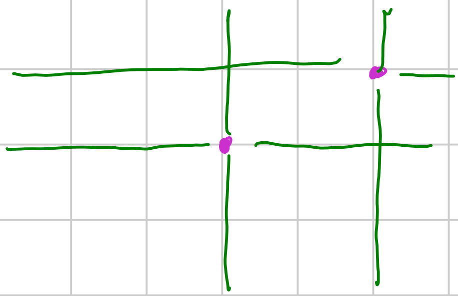
Dopo alcuni tentativi ci si convince che la configurazione ottimale è



$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} i = \frac{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1\right)}{2} \qquad \frac{\lceil \frac{k}{2} \rceil \left(\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1\right)}{2}$$

In totale abbiamo:
$$\begin{cases} \frac{k(k+2)}{4} & k \text{ pari} \\ \frac{(k+1)^2}{4} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

Passiamo a dimostrare che questo è davvero il minimo.



Consideriamo la prima casella segnata
$\longrightarrow$ sulla sua riga e sulla sua colonna troviamo (almeno) k caselle segnate all'inizio

Immaginiamo di colorare di verde le righe e le colonne di queste caselle. Prima o poi segneremo, per la prima volta, una casella che non è verde. Sulla sua riga/colonna ci sono almeno $k-2$ caselle segnate all'inizio, tutte distinte dalle precedenti.

Andiamo avanti in questo modo: le i-esime caselle considerate darà un contributo di $\geq k-2i+2$ caselle segnate all'inizio.

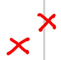
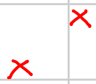
Quindi le caselle segnate all'inizio sono almeno

$$k + (k-2) + (k-4) + \dots + \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ 1 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

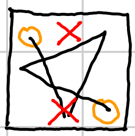
Facendo il conto si troviamo le stesse quantità di sopra.

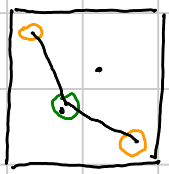
$\boxed{C5}$

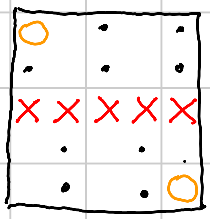
Scacchiera $n \times n$, alcune caselle bloccate.

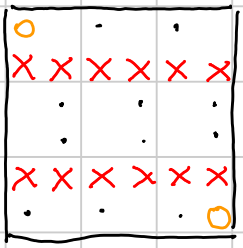
NO  o  . Allora un cavallo può andare dalla casella in alto a sx a quella in basso a dx?

$n = 2$ non ha molto senso

$n = 3$  La risposta è NO

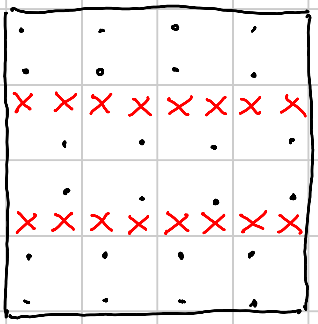
$n = 4$  La risposta è SI

$n = 5$  Da ogni casella con il punto va solo in caselle con il punto. La risposta è NO

$n=6$  Risposta No

Idea: c'è un pattern modulo 3. Per $3k+1$ c'è la strada, altrimenti no.

Nel caso in cui non c'è la strada, uso barriere ogni 3 righe

$3k+2$ 

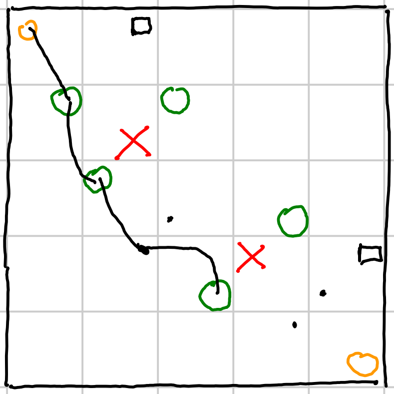
Si crea una "scacchiera" con caselle 2×1

Voglio che l'ultima casella abbia colore diverso dalla prima

Ha $k+1$ righe e $3k+2$ colonne. #"righe" + #"colonne" è dispari, quindi le caselle di arrivo e partenza sono diverse.

<u>Caso 3K</u> Esercizio: si trova lo sbarramento

Caso $3k+1$



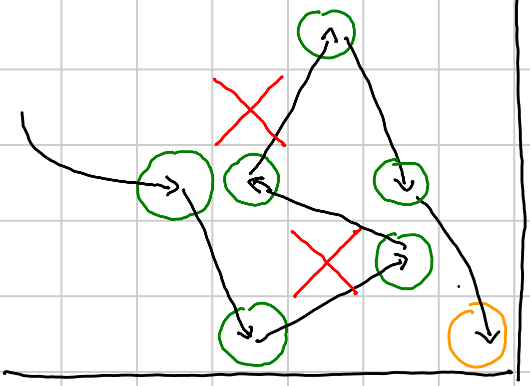
Considero sulla diagonale le caselle $(3h+1, 3h+1)$

Se una non è bloccata, per induzione ci arrivo (considerando le due sottoscacchiere)

Quindi supponiamo che siano tutte bloccate

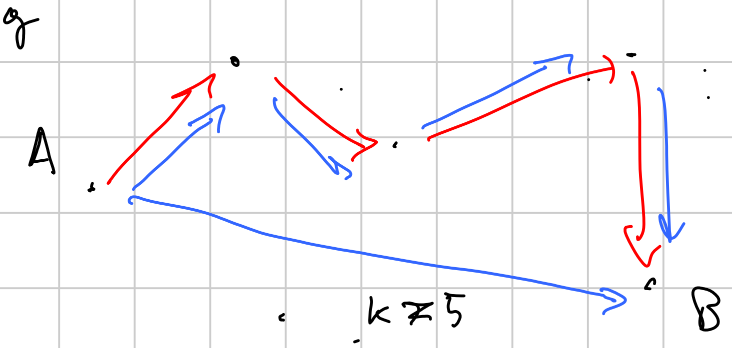
Delle due caselle in cui posso muovere all'inizio, una è libera

Raggiungo una casella adiacente a quelle bloccate e poi salto facendo salti 3×3

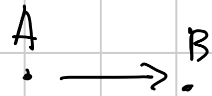


Dalla freccia dobbiamo raggiungere l'angolo.
Possiamo bloccare l'accesso diretto all'angolo, se no con 2 salti arrivo.
Ma allora trovo un percorso alternativo.

$n \geq 7$ punti per ogni coppia c'è un punto che li ~~h~~a battuti entrambi
se $2(2^{(2k)}-1) \geq n$ allora esisto un ciclo $A_1 \dots A_l$ in cui A_i ha battuto A_{i+1} e A_l ha battuto A_1 per un qualche l con $2 \leq l \leq 2k$



A ha battuto B



G Nuovo grafo orientato: $A \to B \iff$ esiste un cammino lungo al più k ~~tra~~ A e B nel grafo di prima (orientato)
Se nel vecchio grafo esisteva un ciclo lungo $2 \leq l \leq 2k$, nel nuovo ce n'è uno lungo 2 (e viceversa)

In queste condizioni, se non ci sono cicli da 2
per ogni sottoinsieme X di 2^k elementi, c'è un vertice
che li ha battuti tutti

Induzione: 2 per ipotesi

$2^{k-1} \to 2^k$ $\quad |X| = 2^k \quad X = X_1 \cup X_2$

$|X_1| = |X_2| = 2^{k-1}$

allora esiste v_1 che ha battuto X_1 in al più $k-1$ passi

v_2 " X_2

e v che ha battuto v_1 e v_2 $(o\ v_1 = v_2)$

Lemma G grafo orientato con n vertici e senza cicli da 2
Sia m t.c. $\forall$ sottoinsieme $|X| = m$ esiste un v che ha frecce verso tutti gli elementi di X. Allora $2(2^m - 1) \leq n$

Dim Oss. se non ci sono cicli da 2, $d_e(v)$ = grado in entrata $\sum_{v \in V(G)} d_e(v) \leq \frac{n(n-1)}{2}$ Quindi

esiste un v $\quad d_e(v) \leq \frac{n-1}{2}$

Sia G' il sottografo dei vicini di v che lo hanno battuto.
Sia $|X| = m-1$ in G': allora $|X \cup \{v\}| = m$
e esiste w con frecce verso tutti gli el. di $X \cup \{v\}$

1) $w \to X$
2) $w \to v$ $\quad w \in G'$

] l'ipotesi è verif. per G'

$m = 1$ Allora $n \geq 2 d_e(v) + 1 \geq 2|G'| + 1 \geq 2(2 \cdot (2^{m-1} - 1)) + 1$

$\frac{n-1}{2} \geq 2 \cdot 2^{m-1} - 1 \quad n \geq 2 \cdot 2^m - 2 + 1 = 2 \cdot 2^m - 1$ $= 2 \cdot (2^m + 1$

Tesi $\Leftrightarrow$ lemma con $m = 2^k$ $\square$