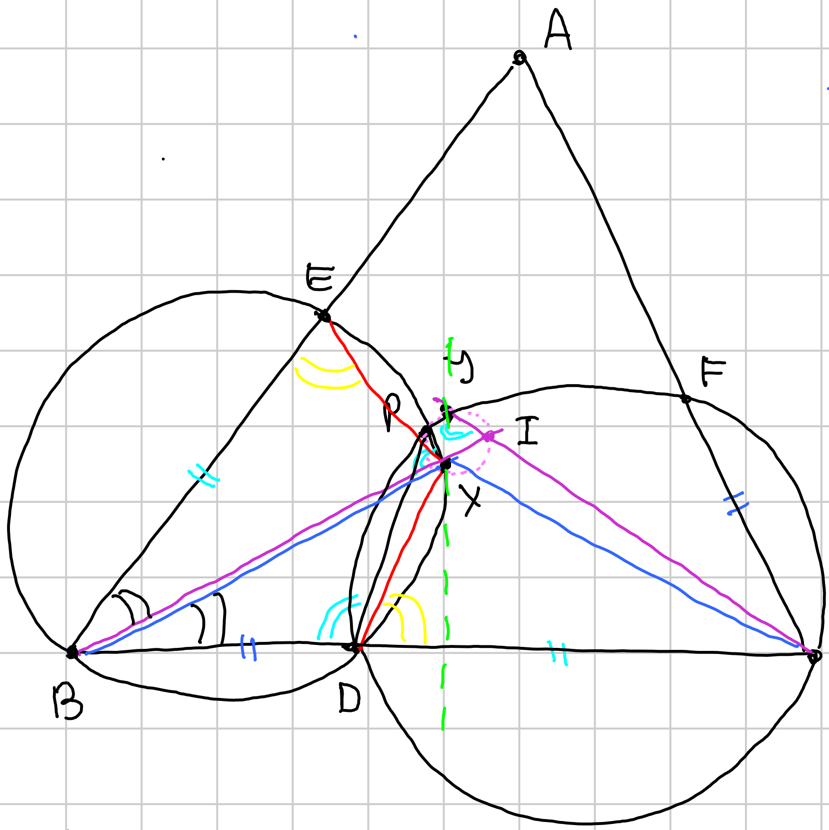
Geometria Sintetica - WC2019

Note Title 1/29/2019

(1)



$\exists\, Q$: PQ costante

(*) $P\hat{Y}I = P\hat{D}B = P\hat{X}B$

$BX = XC$

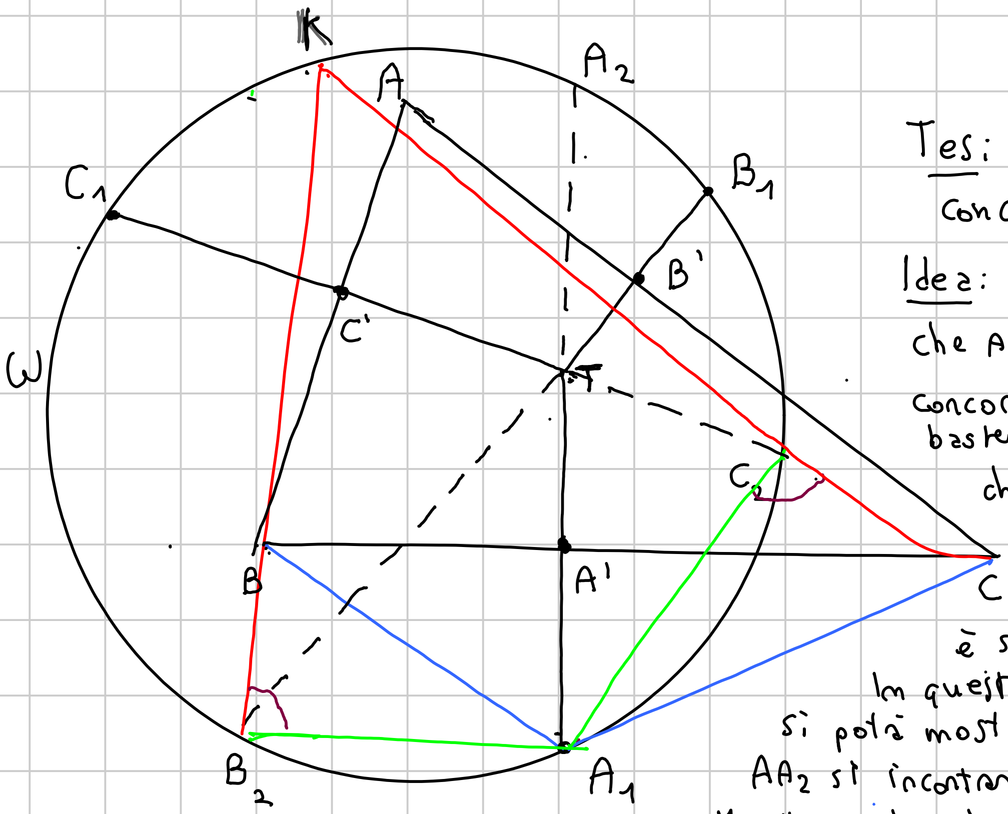
poiché $\Delta BXE \cong$

$\cong \Delta CDX$

<u>Oss.</u> $X := \odot BDE \cap BI$ si può mostrare anche con un po' di trigonometria che X è fisso (indip. da B).

Poi si conclude come in (*).

(2)



<u>Tesi:</u> AA_2, BB_2, CC_2 concorrono su ω.

<u>Idea:</u> Per mostrare che AA_2, BB_2, CC_2 concorrono su ω, basterebbe mostrare che l'intersezione di BB_2 e CC_2, che chiamo k, è su ω.
In questo modo analog. si potrà mostrare che BB_2 e AA_2 si incontrano in k' su ω. Ma allora $k=k'$ perchè stanno entrambi su ω e BB_2.

<u>Tesi 2</u> $k := BB_2 \cap CC_2$ allora $K \in \omega$.

<u>Oss.</u> Questo vorrebbe dire che il quadrilatero $KB_2A_1C_2$ è ciclico.
Dunque per mostrare <u>tesi 2</u> basta mostrare $\boxed{\angle A_1C_2C = \angle A_1B_2B}$ (FINE)

<u>Remind:</u> (d'ora in poi angoli orientati $\angle XYZ = \angle(XY, YZ)$ dove in generale $\angle(l, r)$ è l'angolo di cui si deve ruotare l in senso antiorario per coincidere con r).

<u>CLAIM:</u> (*) $A_1\hat{B_2}B \sim A_1\hat{C_2}C$. Chiaramente CLAIM $\Rightarrow$ (FINE) e dunque basterebbe mostrare il CLAIM

<u>Oss.</u> $A_1\hat{B_2}B \sim A_1\hat{C_2}C$ (*) $\Longleftrightarrow$ $A_1\hat{B_2}C_2 \sim A_1\hat{B}C$ (**)

(**) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{B_2A_1}{C_2A_1} = \dfrac{BA_1}{CA_1}$ + $\angle B_2A_1C_2 = \angle BA_1C$ $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{B_2A_1}{BA_1} = \dfrac{C_2A_1}{CA_1}$ + $\angle B_2A_1B = \angle C_2A_1C$ $\Leftrightarrow$ (*)

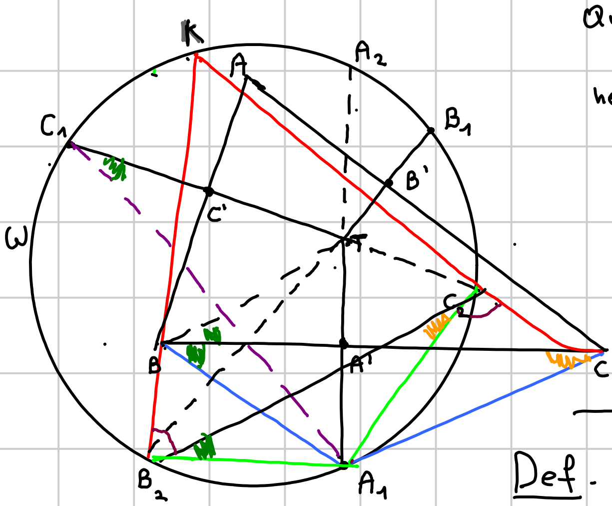
<u>Tesi 3:</u> $A_1\hat{B_2}C_2 \sim A_1\hat{B}C$

<u>Dim:</u> $\angle A_1BC = \frac{1}{2}\angle A_1BT = \angle A_1C_1T = \angle A_1B_2C_2$

A_1 è simmetrico di T rispetto a BC

B è il circocentro di A_1C_1T essendo l'intersezione di due assi di questo triangolo

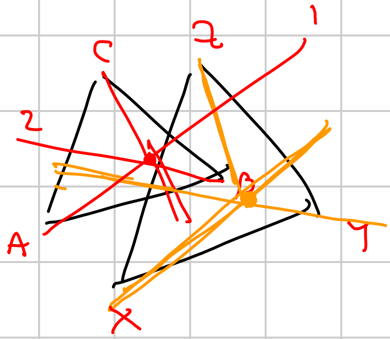
angoli alla cfr che vedono l'arco $\overset{\frown}{A_1C_2}$ in ω



Quindi questo viene da
$\frac{1}{2}$ angolo al centro = angolo alla cfr
nella cfr circoscritta a A_1CT

Analogamente $\angle A_1CB = \angle A_1C_2B_2$ ■

Quindi
Tesi 3 ⇒ CLAIM ⇒ (FINE) ⇒ TESI PEL PROBLEMA.

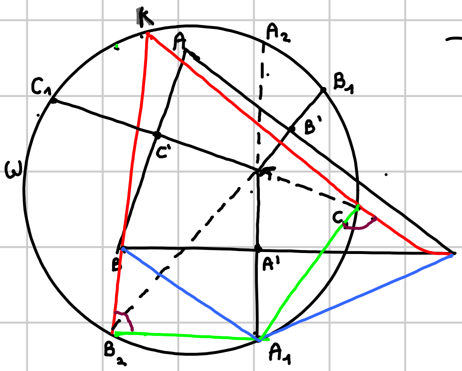


Def. ABC è ortologico su XYZ se
La perp. da A a YZ
La perp da B a XZ
La perp. da C a XY
concorrono (nel centro di ortologia di ABC su XYZ)

Es. 1 ABC è ortologico su XYZ
$\Updownarrow$
XYZ è ortologico su ABC

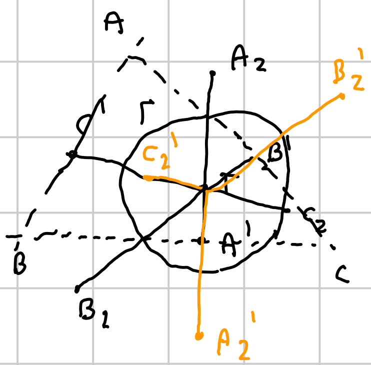
(*) **Es. 2** Se ABC e XYZ sono ortologici con stesso centro di ortologia cioè il c.d.o. di ABC su XYZ è = c.d.o. di XYZ su ABC, allora ABC e XYZ sono prospettici (AX, BY, CZ concorrono)

(**) **Es.3** (Th. Sondat) Due triangoli ortologici con c.d.o. T_1, T_2 e prospettici con c.d. prospezione S soddisfano S, T_1, T_2 allineati



Nell'esercizio $A_2B_2C_2$ è ortologico su ABC perché la perp. da A_2 a BC è la retta A_2T (e cicliche). Quindi T è il c.d.o. di $A_2B_2C_2$ su ABC
Per dimostrare AA_2, BB_2, CC_2 concorrono si potrebbe usare Es.2 + T è anche il c.d.o. di ABC su $A_2B_2C_2$.

CLAIM $AT \perp B_2C_2$ (e cicliche)



Oss. $A_2T\cdot TA' = B_2T\cdot TB' = C_2T\cdot TC' = \frac{1}{2} Pow_\omega T$
Allora $TA'\cdot TA_2' = TB'\cdot TB_2' = TC'\cdot TC_2'$
Cioè ∃ cfr. Γ di centro T t.c. invertendo in lei $A' \Leftrightarrow A_2'$ e cicliche.

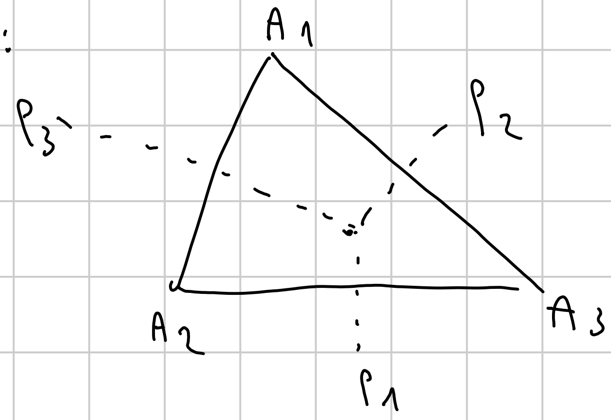
Allora BC è la polare di A_2' rispetto a Γ
AC " B_2' rispetto a Γ
AB " C_2' " (*)

(*) $A_2'B_2'$ è la polare di C rispetto a Γ (e cicliche) ⇒ $A_2'B_2' \perp CT$
Ma $A_2B_2 \parallel A_2'B_2'$ e quindi $CT \perp A_2B_2$ (e cicliche) (CLAIM)

C(A,M) + ES. 2 $\Rightarrow$ AA_2, BB_2, CC_2 concorrono

Appr. alternativo

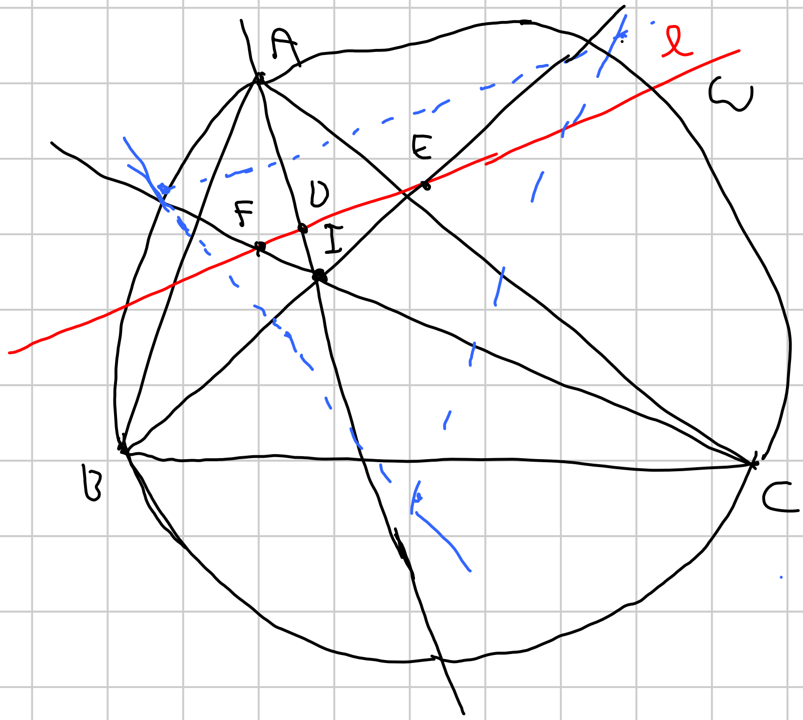
Lemma:



$\Rightarrow$ $\odot(A_2A_3P_1)$, $\odot(A_1A_3P_2)$, $\odot(A_1A_2P_3)$, $\odot(P_1P_2P_3)$ concorrono

e da qui si conclude

ESERCIZIO 3



$\tau = \Delta$ formato dagli assi di AD, BE, CF

Tesi: $\odot(\tau)$, ω tangono

oss: di τ "conosciamo" le direzioni dei lati

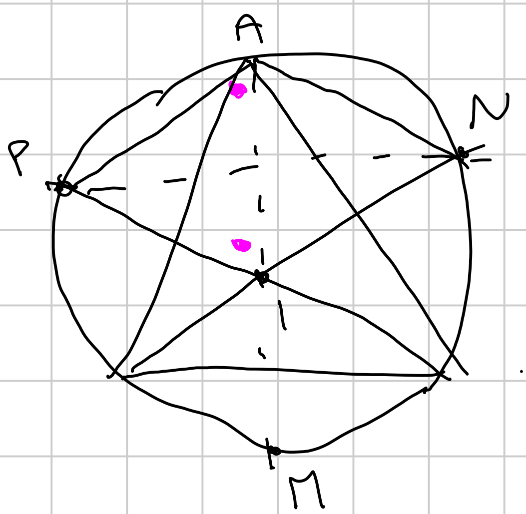
Vogliamo che $\odot(\tau)$, ω siano omotetiche tramite una φ di centro $P \in \odot(\tau), \omega$.

$(\varphi : \odot(\tau) \to \omega)$

Domanda: chi sarà $\varphi(\Delta\tau)$?

Avrà i lati $\perp$ a AI, BI, CI

$\Rightarrow$ è MNP, (M, N, P sono i pt. medi degli archi $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ di ω, ossia $AI, BI, CI \cap \omega$)



$PA = PI$ e $NA = NI$

$\Rightarrow PN$ è l'asse di AI

Quindi vogliamo che $\overset{\Delta}{MNP}$, τ siano omotetici di centro $P \in \omega$

Strategia: Chi è $\varphi(\ell)$? Sarà parallela a ℓ.

Claim: $\varphi(\ell)$ passa per I.

<u>Dim</u>: Sia t la retta per I che sia $\parallel$ a ℓ.
Voglio $t = \varphi(\ell)$.

Parentesi (Remind):

Fatto (retta di Simson): Quando le proiezioni di un punto P sui lati di ABC sono allineate?
$\iff P \in \odot(ABC)$

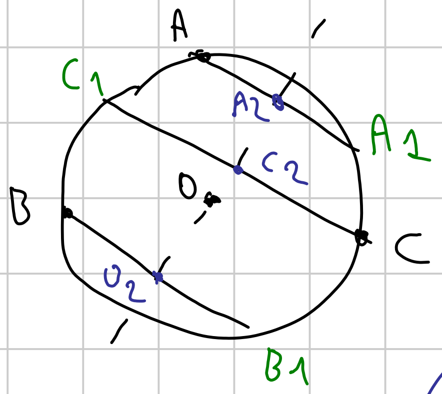
"Duale": Quando le simmetriche di una retta t rispetto a AB, BC, CA concorrono?

Se concorrono (in P), allora i simm. di P rispetto a AB, BC, CA stanno su t
$\Rightarrow$ le proiezioni di P sui lati sono allineate
$\Rightarrow P \in \odot(ABC)$.

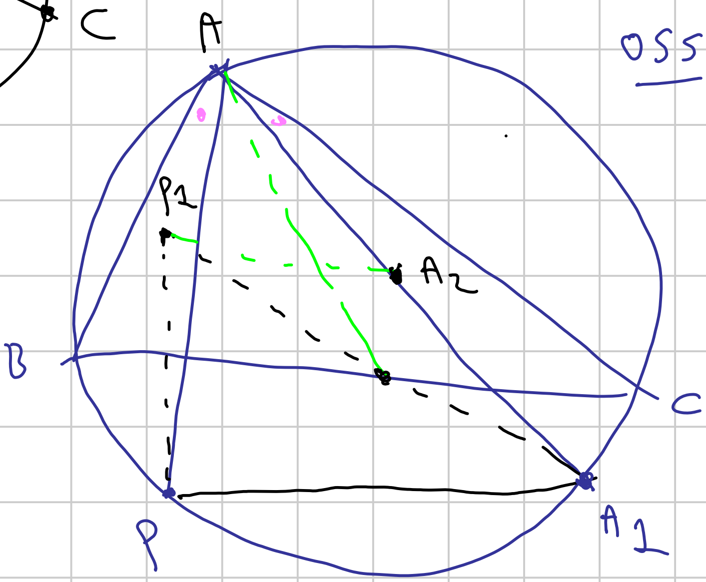
Fatto (noto): Se $P \in \odot(ABC)$, i suoi simmetrici risp. ai lati sono in effetti allineati, e questa retta passa per l'ortocentro H di ABC.

<u>OSS</u>: La retta di Simson di P biseca $\overline{PH}$

(Sketch: Se prendo le simmetriche di AP, BP, CP risp. a AI, BI, CI rispettiv. esse sono parallele. Se queste intersecano ω in A_1, B_1, C_1 $\Rightarrow$ i pt. medi di $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ sono allineati su una retta che passa per O.



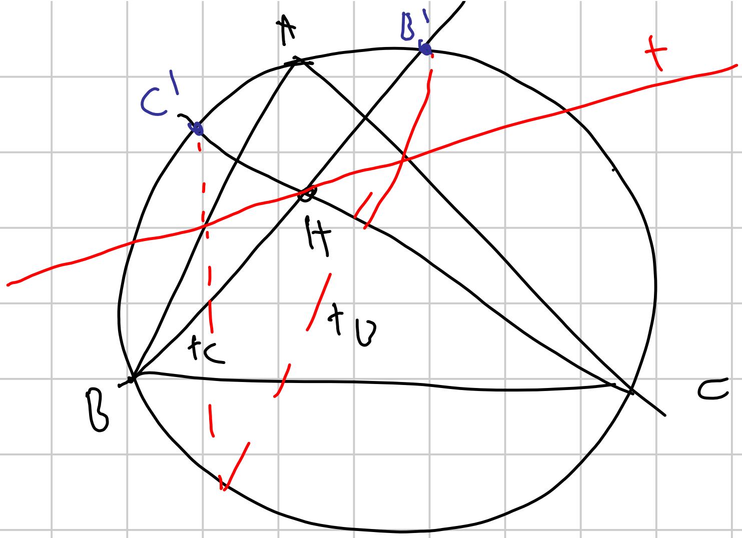
OSS: $PA_1 \parallel BC$



$\Rightarrow$ Se P_1 è il simm. di P risp. a BC
P_1, A_1 sono simm. risp. al punto medio di BC $\Rightarrow$ il baricentro di AA_1P_1 coincide con quello di ABC (per Ceva), G
$\Rightarrow$ l'omotetia di centro G e fattore -2 (che manda O in H) manda $\overline{A_2B_2C_2O}$ in $\overline{P_1P_2P_3H}$

$\square$

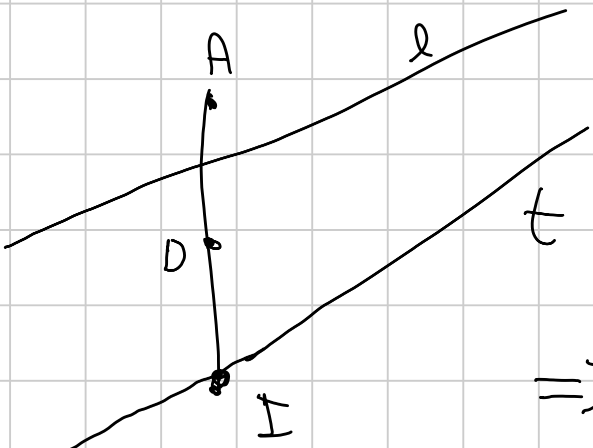
Viceversa: se t passa per H, le sue simm. risp. ai lati concorrono su $\odot(ABC)$



(mi basta che l'angolo tra t_B, t_C sia lo stesso sotteso da $\widehat{B'C'}$, $\pi - 2\angle A$)

Risposta alla domanda "duale"
se e solo se $H \in t$ e in tal caso il pt. di concorrenza $\in \odot(ABC)$.

Ora, $NP \perp IM$ e analoghi $\Rightarrow I$ è l'ortocentro di ΔMNP.
$\Rightarrow$ le simm. di t risp. a NP, PM, MN concorrono. Le chiamo t_M, t_N, t_P.
$t_M \cap t_N \cap t_P = X \in \odot(MNP) = \omega$



Chi sono le simm. di l risp. ai lati di T?

Sono proprio t_M, t_N, t_P!

$\Rightarrow$ l passa per l'ortocentro di T

$\Rightarrow \varphi(l) = t$, come voluto.

Inoltre il centro di φ è proprio X.
Infatti si vede che t_M è fissata da φ

$\Rightarrow$ Abbiamo un'omotetia centrata in
$X \in \omega$ t.c. $\varphi(\omega) = \odot(\Delta\tau)$.

$\Rightarrow$ ω, $\Delta\tau$ sono tangenti.