WC 2019 — MISCELLANEA (by Max)

Note Title 1/29/2019

M1 SISIFO

Numero minimo mosse $\geq \left\lceil \frac{m}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{m}{m} \right\rceil$

\# mosse per andare a passo di 1 ... a passo di 2

È come se:

→ la pietra in fondo fa sempre passi da 1

→ la pietra subito sopra " " " " 2

→ " " " 3

Quando ho un mucchio di k pietre, sposto quella con indice + alto.

Questo indice sarà $\geq$ K

$\boxed{\text{Quindi in ogni mossa la pietra } P_m \text{ che si muove si sposta di } \leq m \text{ scatole.}}$

P_1 ci mette $\geq \left\lceil \frac{m}{1} \right\rceil$ mosse

P_2 ci mette $\geq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ mosse e così via.

M2 Eq. FUNZIONALE

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) f(y) = f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right)$$

1ª SOLUZIONE SISTEMONE: scrivo varie eq. che contengono $f(t)$, $f(2t)$, $f(t^2)$, $f(\dots)$ e spero di avere tante eq. quante incognite

Oss. preliminare: tutte le $f(x) = Ax + B\frac{1}{x}$ sono ok

L'idea è di avere un sistema in $f(t)$, $f(at)$, $f(t^2)$, $f(at^2)$

$P(t,t) \Rightarrow \left(t + \frac{1}{t}\right) f(t) = \boxed{f(t^2)} + f(1)$

$P\left(\frac{a}{t}, at\right) \Rightarrow \left(\frac{a}{t} + \frac{t}{a}\right) f(at) = f(a^2) + \boxed{f(t^2)}$

$P(at, t) \Rightarrow \left(at + \frac{1}{at}\right) f(t) = \boxed{f(at^2)} + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$P(t, at) \Rightarrow \left(t + \frac{1}{t}\right) f(at) = \boxed{f(at^2)} + f(a)$

4 eq. in 4 incognite $\Rightarrow$ risolvo

$$\left(t + \frac{1}{t}\right) f(t) = f(1) - f(a^2) + \left(\frac{a}{t} + \frac{t}{a}\right) \boxed{f(at)}$$

$$\left(at + \frac{1}{at}\right) f(t) = f\left(\frac{1}{a}\right) - f(a) + \left(t + \frac{1}{t}\right) \boxed{f(at)}$$

Eliminando $f(at)$ ottengo

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)^2 f(t) - \left(t+\frac{1}{t}\right)\left[f(1)-f(a^2)\right] =$$

$$= \left(at+\frac{1}{at}\right)\left(\frac{a}{t}+\frac{t}{a}\right) f(t) - \left(\frac{a}{t}+\frac{t}{a}\right)\left[f\left(\frac{1}{a}\right)-f(a)\right]$$

$$f(t)\underbrace{\left\{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2 - \left(at+\frac{1}{at}\right)\left(\frac{a}{t}+\frac{t}{a}\right)\right\}}_{\text{MIRACOLO: SE NE VANNO LE } t \text{ !!!}} = At + \frac{B}{t}$$

(Se anche non se ne andavano, avevo comunque una formula da verificare

— o — o —

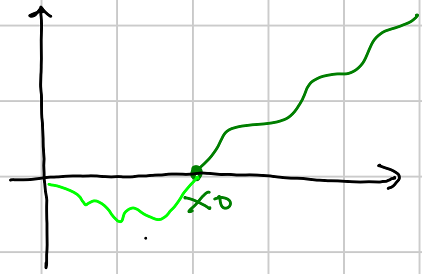
$\boxed{\text{2° metodo}}$ Supponiamo che f si annulli, cioè $f(x_0)=0$

$$P(x, x_0) \Rightarrow \boxed{f(x x_0) = -f\left(\frac{x_0}{x}\right)}$$ SIMMETRIA !!

Supponiamo che f si annulli 2 volte

$f(x_0) = f(y_0) = 0$

con $x_0 \neq y_0$.



DOPPIA SIMMETRIA: tanti annullamenti, e quindi ancora + simmetrie!

Speranza: se si annulla almeno 2 volte, allora $f \equiv 0$

Se dimostro la speranza ho finito. Perché?

Conclusione

- Se $f(x)$ e $g(x)$ sono soluz., allora $f(x)+g(x)$ è soluzione ("f compare solo di 1° grado nell' eq.)
- $Ax + B\frac{1}{x}$ sono tutte soluzioni
- Se $f(x)$ è soluzione, allora $\overbrace{f(x) + Ax + B\frac{1}{x}}^{g(x)}$ è soluzione, e posso scegliere A e B in modo che

$$g(\pi) = g(2019) = 0$$

Se vale la speranza $g(x) \equiv 0$.

— o — o —

Parentesi: in un contesto additivo, doppia simmetria $\Rightarrow$ periodicità.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x_0+t) = \pm f(x_0-t)$$
$$f(y_0+t) = \pm f(y_0-t)$$

$\Rightarrow f$ è periodica

$$f(x_0+\underbrace{t}) = f(x_0-t) = f(y_0 + (x_0-y_0-t))$$
$$= f(y_0 - (x_0-y_0-t)) = f(2y_0 - x_0 + \underbrace{t})$$

$$f(t) = f(x_0 + \underbrace{(t-x_0)}) = f(2y_0 - x_0 + \underbrace{t - x_0})$$
$$= f(2y_0 - 2x_0 + t)$$

Nel nostro contesto moltipl., con gli stessi passaggi

$f(x_0 t) = -f\left(\frac{x_0}{t}\right)$ $\qquad$ $f(y_0 t) = -f\left(\frac{y_0}{t}\right)$

$\rightsquigarrow \quad f(t) = f\left(\frac{y_0^2}{x_0^2} t\right)$ $\qquad$ $f(t) = f(\alpha t)$ fisso

Tornando all' eq.

$$\left(\alpha x + \frac{1}{\alpha x}\right) f(y) = f(\alpha x y) + f\left(\frac{y}{\alpha x}\right)$$

$$= f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right) f(y)$$

Se $\exists\, y$ t.c. $f(y) \neq 0$, lo scelgo e semplifico e il resto non può essere vero $\forall x$ se $\alpha \neq 1$.

M3

$$M(p) := \frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ \frac{k^{4038}}{p} \right\}$$

assume infiniti valori per ogni p.

(1) Cerco di fare in modo che tutte le classi k^{4038} siano DISTINTE

(1.1) Possiamo fare in modo che k^{2019} siano tutte distinte?

Fatto noto: $k \to k^a$ è iniettiva mod p $\iff$ $(a, p-1) = 1$

Posso fare in modo che $(2019, p-1) = 1$?

Basta scegliere $p \equiv \underset{25}{2} \pmod{2019}$.

(1.2) Quando faccio il $\square$, rimangono distinte?

Può accadere che

$$k_1^{2019} = -k_2^{2019} ?$$
$$= (-k_2)^{2019}$$

cioè $\iff k_1 = -k_2$, il che è impossibile data la restrizione su k.

(1.3) I numeratori sono tutti e soli i residui quadratici (mod p).

(2) Sommare i residui quadr. mod p

Supponiamo che r residuo $\Rightarrow$ $p-r$ residuo.

Allora so sommare

$$\sum_{r\in R} r = \sum_{r\in R} p-r = p\cdot\frac{p-1}{2} - \sum_{r\in R} r$$

$$\rightsquigarrow \quad \sum_{r\in R} r = \frac{p(p-1)}{4} \quad \Rightarrow \quad M(p) = \frac{1}{2}$$

Quindi ho finito se trovo ∞ primi p t.c.

- $p \equiv 2 \pmod{2019}$
- vale la simm. dei residui mod p

Questa vale $\Leftrightarrow$ -1 è un residuo

$\Leftrightarrow$ $p \equiv 1 \pmod 4$

DIRICHLET completa l'opera.

(Esistono ∞ primi del tipo $an+b$ se $(a,b)=1$)

— o — o —