Winter Camp 2019

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

WC19 Algebra

Note Title 1/27/2019

A6 $f,g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$f(g(x)+y) = g(f(y)+x)$$

Tesi: f limitata $\Rightarrow$ g periodica

$\operatorname{Im} f \supseteq \operatorname{Im} g$ Analogo $\operatorname{Im} g \supseteq \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$ e ha cardinalità finita.

Oss. Se $g(x) = g(x')$ allora $f(g(x)+y) = g(f(y)+x)$

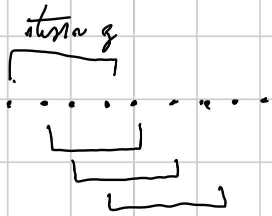
$$f(g(x')+y) = g(f(y)+x')$$

ovvero $g(x+f(y)) = g(x'+f(y))$

Suppongo che $1 \in \operatorname{Im} f$ ..

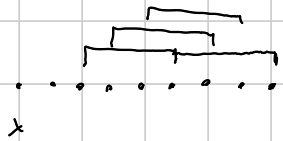
$g(x) = g(x') \Rightarrow g(x+1) = g(x'+1)$

$\Rightarrow g(x+M) = g(x'+M)$



Fisso x qualsiasi. Prendo $x, x+1, \dots, x+|\operatorname{Im} g|$

Allora ci sono i, j con $g(x+i) = g(x+j)$

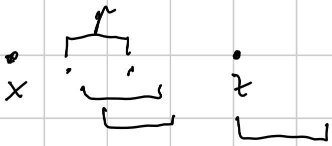


$\Rightarrow$ per ogni z abbastanza grande (poco dopo x) vale che z ha periodo p in avanti.

Dove p dipende da x ma $p \leq |\mathrm{Im}\, g|$

Ripeto il ragionamento prendendo degli x sempre più indietro

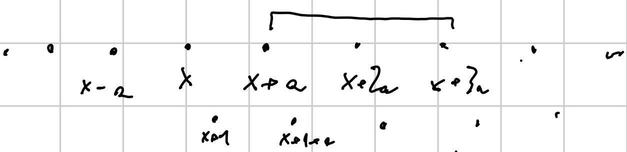
$\Rightarrow$ ci deve essere un p che si ripete infinite volte.



$$f(z) = f(z+p)$$

$\Rightarrow f$ periodica.

Prendo $a \in \mathrm{Im}\, f$ suppongo $a > 0$



$$g(x) = g(x + pa)$$

AS. Trova polinomi reali t.c.

$$p(a)^2 + p(b)^2 + p(c)^2 = p(a+b+c)^2$$

$\forall\ a, b, c$ reali t.c. $ab + bc + ca = 1$

Idee:

1) $p(x) = \alpha x^d + \beta x^{d-1} + \dots$

2) suppongo p.es. $a+b+c=\lambda$, λ radice

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

$a+b+c$ non troppo piccolo..

3) funzioni simmetriche elementari

$S = a+b+c$

$Q = ab+bc+ca = 1$

$P = abc$

$$\underbrace{p(a)^2+p(b)^2+p(c)^2}_{g(S,Q,P)} = \underbrace{p(a+b+c)^2}_{f(S)}$$

polinomi

$g(S,1,P)$ deve dipendere solo da S ?!

$g(S,1,P)$ e $f(S)$ devono proprio essere uguali come polinomi in $\mathbb{R}[S,P]$

⚠ non basta che siano uguali in ∞ punti, per esempio $f(x,y)\, y-x^2$ e $g(x,y)=0$ coincidono su tutti i pti della forma (k, k^2) per $k \in \mathbb{N}$

però, proprietà più forte: fissato ad es. S, esistono infiniti P per cui vale l'uguaglianza, e da questo si dimostra che sono davvero uguali

$$f(x,y) = f_0(x) + f_1(x)\, y + f_2(x)\, y^2 + \dots$$
$$g(x,y) = g_0(x) + g_1(x)\, y + \dots$$

Fissato $x = x_0$, i polinomi in y $f(x_0, y)$ e $g(x_0, y)$ coincidono per ∞ scelte di y $\Rightarrow$ $f_i(x_0) = g_i(x_0)$ $\forall i$

Ma questo ragionamento vale per ∞ valori $x_0, x_1, x_2, \dots$, quindi $f_i(x) = g_i(x)$ come polinomi in x $\forall x$

$$P(x)^2 =: q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots$$

$$LHS = q_0 \cdot \underbrace{3} + q_1 \cdot \underbrace{(a+b+c)} + q_2 \underbrace{(a^2+b^2+c^2)} + \dots$$

$$\Pi_0 = a^0 + b^0 + c^0 = 3$$
$$\Pi_1 = a^1 + b^1 + c^1 = S$$
$$\Pi_2 = a^2 + b^2 + c^2 = S^2 - 2Q$$
$$\Pi_3 = a^3 + b^3 + c^3 = S^3 - 3SQ + 3P$$
$$\Pi_4 = a^4 + b^4 + c^4 = S^4 - 4S^2Q + 4PS + 2Q^2$$

$\Pi_5 = a^5 + b^5 + c^5 = S^5 - 5S^3Q + \dots$

Π_6 $\quad \dots + P \dots + \dots PS^3 \dots$

$LHS = q_0\Pi_0 + q_1\Pi_1 + \dots$ | $RHS = q_0 + q_1 S + q_2 S^2 + \dots$

$$q_0 \cdot 3$$
$$+ q_1 \cdot \cancel{S}$$
$$+ q_2 \cdot (\cancel{S^2} - 2Q)$$
$$+ q_3 \cdot (\cancel{S^3} - 3SQ + 3P)$$
$$+ q_4 \cdot (\cancel{S^4} - 4S^2Q + \boxed{4PS} + 2Q^2)$$

$$q_0 \cdot 1$$
$$+ \cancel{q_1 \cdot S}$$
$$+ \cancel{q_2 \cdot S^2}$$
$$+ \cancel{q_3 \cdot S^3}$$
$$+ q_4 \cancel{S^4}$$

per es. se vogliamo soluzioni con $p(x)$ di grado 1 $q(x) = p(x)^2$ di grado 2, deve succedere

$$q_0 \cdot 3 + q_2 \cdot (-2) = q_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{q_0 = q_2}$$

$$q(x) = \alpha^2 (x \pm 1)^2 \qquad p(x) = \alpha(x \pm 1) \qquad \text{4 soluzioni!}$$

Con $\deg q = 4$, LHS e RHS mai uguali come polinomi per colpa di PS

$\Rightarrow$ non ci sono soluzioni con $\deg q = 4$

Con $\deg q = 6$?

Claim: per $k > 2$, Π_k contiene un termine del tipo $P^\alpha S^\beta$, senza Q, che non si potrà semplificare nel conto sopra, e quindi ho finito.

C'è una relaz. ricorsiva tra i Π_k

$$\Pi_{k+1} = S\Pi_k - Q\Pi_{k-1} + P\Pi_{k-2}$$

$$a^{k-2}(a^3 - Sa^2 + Qa - P) = 0 \quad \text{(Newton identities)}$$
$$+\, b^{k-2}(b^3 - \dots \qquad) = 0$$
$$+\, c^{k-2}(c^3 - \dots \qquad) = 0$$

(non so se si finisce)

Prendiamo una scelta particolare di a, b, c / P, Q, S

tale che $Q = ab + bc + ca = 0$.

Allora, se non c'è ~~qualcuno~~ nessuno dei termini "proibiti" succede che

$$\Pi^k = S^k + (\text{roba che contiene } Q)$$

e quindi, per una scelta di a, b, c con $Q = 0$,

$$(a^k + b^k + c^k) = (a+b+c)^k$$

Per esempio, prendo $a = -2 \quad b = 3 \quad c = 6$

dovrebbe succedere che $(-2)^k + 3^k + 6^k = 7^k$

falsa per $k \geq 3$

$\Rightarrow$ per $k \geq 3$ c'è un termine "senza Q" oltre a S^k

$\Rightarrow$ non si semplifica

$\Rightarrow$

$$p(a)+p(b)+p(c)=p(a+b+c)$$

non ha sol. per deg $p>2$

Sol. Mathlinks:

$$a=-2x+1$$

$$b=3x+\left(\frac{i-3}{2}\right)$$

$$c=6x-(3+2i)$$

deve valere $p(a)^2+p(b)^2+p(c)^2=p(a+b+c)^2$

Confrontando termini di grado più alto in x,

$$(-2)^k+3^k+6^k=7^k \text{, imp. per } k>2$$

A6 Trovare terne $a,b,c\geq 0$ t.c.

- $a+b+c=3$
- $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt{2}}\geq\sum_{cyc}\dfrac{ab}{\sqrt{b+c}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

In realtà:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt{2}}\leq\sum_{cyc}\frac{ab}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

+ casi di uguaglianza $(1,1,1)$, $(1,2,0)$ + ⚠

$$a+b \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

CASA IMO '01

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge 1$$

CS SU

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)\left(a\sqrt{a^2+8bc}\right) = a^2$$

$$\sum \frac{ab}{\sqrt{b+c}}$$

$$\frac{ab}{\sqrt{b+c}} \cdot \frac{ab}{\sqrt{b+c}} \cdot ab(b+c) = (ab)^3$$

$$\left(\sum_{cyc} \frac{ab}{\sqrt{b+c}}\right)\left(\sum_{cyc} \frac{ab}{\sqrt{b+c}}\right)\left(\sum_{cyc} ab(b+c)\right) \ge \left(\sum_{cyc} ab\right)^3$$

Hölder

$$\left(\sum p_i^3\right)\left(\sum q_i^3\right)\left(\sum r_i^3\right) \ge \left(\sum p_i q_i r_i\right)^3$$

$Q = ab+bc+ca \qquad P = abc$

$$\left(\sum_{cyc} \frac{ab}{\sqrt{b+c}}\right) \ge \sqrt{\frac{Q^3}{\sum_{cyc}(ab^2+abc)}} \ge \sqrt{\frac{Q^3}{4+2P}}$$

$$\boxed{ab^2+bc^2+ca^2+abc \leq 4 \quad \text{per } a+b+c=3}$$

$$RHS \geq \sqrt{\frac{Q^3}{4+2P}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{\text{HOPE}}{\geq} \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt{2}}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = \sum_{sym} a^2b + 2abc$$

$$Q \cdot 3 = (ab+bc+ca)(a+b+c) = \sum_{sym} a^2b + 3abc$$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 3Q - P$$

$$\sqrt{\frac{Q^3}{\cancel{4+2P}\ 2+P}} + \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \geq \frac{3Q-P}{2\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$\sqrt{\frac{Q\,Q^3}{Q(2+P)}} + 1 = \frac{Q^2}{\sqrt{Q(2+P)}} + 1 \geq \frac{2Q^2}{2+P+Q} + 1$$

$$\frac{2Q^2}{2+P+Q} + 1 \overset{\text{HOPE}}{\geq} \frac{3Q-P}{2} \qquad \sqrt[3]{P} \leq \sqrt[2]{Q} \leq \frac{a+b+c}{3} = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{4Q^2}{2+P+Q} + Q + P + 2 \geq 4Q$$

$$ab^2+bc^2+ca^2+abc \overset{?}{\le} 4 \qquad a+b+c=3$$

$$27\left(ab^2+bc^2+ca^2+abc\right) \overset{?}{\le} 4\,(a+b+c)^3$$

$$\left[\begin{array}{lcl} 15\sum ab^2 & \le & 4\sum a^3 \\ \quad 3abc & ? & 12\sum a^2b \end{array}\right]$$

SOS (Sum Of Squares) : $\sum X\,(b-c)^2 \ge 0$

Schur - Vornicu : $\sum A\,(a-b)(a-c) \ge 0$

Trick: $\sum X\,(b-c)^2 = \sum (Y+Z)\,(a-b)(a-c)$

$$\sum A\,(a-b)(a-c) = \sum\left(\frac{B+C-A}{2}\right)(b-c)^2$$

$$3a^3+3b^3+3c^3-3ab^2-3bc^2-3ca^2 \ge 0$$

$$a^3+2b^3-3ab^2\ \boxed{\cancel{\ge 0}} = (a+2b)(a-b)^2$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc\ \boxed{\cancel{\ge 0}} = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$

$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{2}\sum(b-c)^2\right) =$$

$$= \sum\left(\frac{a+b+c}{2}\right)(b-c)^2$$

$$12\sum a^2b - 12\sum ab^2 = 12\,(b-c)(a-b)(a-c)$$

$$= 4\sum (b-c)\,(a-b)(a-c)$$

$$\begin{cases} \sum (b+2c)(b-c)^2 + \sum \left(\frac{a+b+c}{2}\right)(b-c)^2 \\ + \sum (4b-4c)(a-b)(a-c) \end{cases} \geq 0$$

Forma Schur: $\sum (c+2a+a+2b+a+b+c+4b-4c)(a-b)(a-c) \geq 0$

$$\sum (4a+6b-2c)(a-b)(a-c) \geq 0$$

SE $a \geq b \geq c$

$$\begin{aligned} &+ + (4a+6b-2c)(a-b)(a-c) \\ ?\ &- (4b+6c-2a)(b-c)(b-a) \quad \geq 0 \\ &+ + (4c+6a-2b)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

$$|(a-b)(a-c)| \geq |(b-c)(b-a)|$$
$$|(c-a)(c-b)| \geq |(b-c)(b-a)|$$

Quindi ci basta mostrare che

$$(4a+6b-2c) + (4c+6a-2b) \geq (4b+6c-2a)$$

OK

Forma SOS, Caso $a \leq b \leq c$

$$\sum \left(b+2c+\frac{a+b+c}{2}+\frac{4c-4a+4a-4b-(4b-4c)}{2}\right)(b-c)^2 \geq 0$$

$$\sum \left(\frac{3}{2}b-\frac{3}{2}c+\frac{9}{2}a\right)(b-c)^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} ?\ &\left(\frac{3}{2}b-\frac{3}{2}c+\frac{9}{2}a\right)(b-c)^2 \\ + &\left(\frac{3}{2}c-\frac{3}{2}a+\frac{9}{2}b\right)(c-a)^2 \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b + \frac{9}{2}c \right)(a-b)^2$$

$$(b-c)^2 \leq (c-a)^2$$

Ci basta $\frac{3}{2}c - \frac{3}{2}a + \frac{9}{2}b \geq \frac{3}{2}b - \frac{3}{2}c + \frac{9}{2}a$

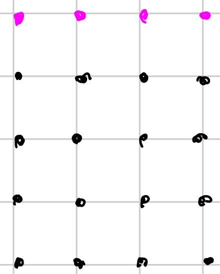
OK

WINTER CAMP 2019 - COMBINATORIA

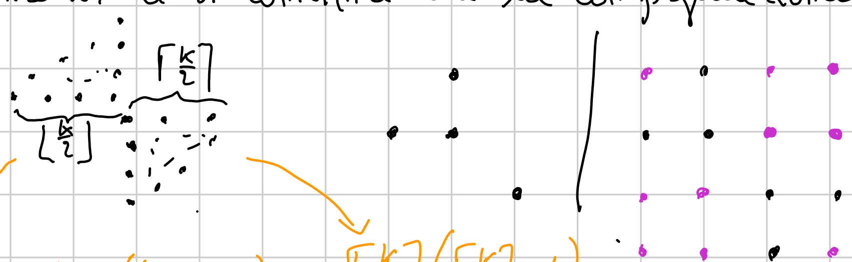
Note Title 1/28/2019

C4 Griglia estesa indefinitamente
All'inizio N caselle sono segnate
Possiamo segnare una nuova casella se nella sua riga e colonna ci sono già $\geq K$ caselle segnate
Qual è il minimo N per cui possiamo segnare qualunque casella?

1ª osservazione: un quadrato $k \times k$ funziona
$\Rightarrow N \leq k^2$



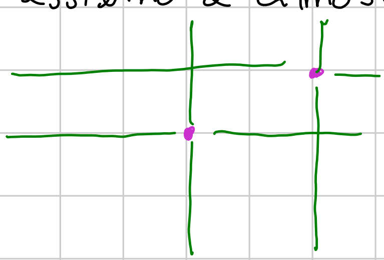
Dopo alcuni tentativi ci si convince che la configurazione ottimale è



$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} i = \frac{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1\right)}{2} \qquad \frac{\lceil \frac{k}{2} \rceil \left(\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1\right)}{2}$$

In totale abbiamo:
$$\begin{cases} \frac{k(k+2)}{4} & k \text{ pari} \\ \frac{(k+1)^2}{4} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

Passiamo a dimostrare che questo è davvero il minimo.



Consideriamo la prima casella segnata
$\longrightarrow$ sulla sua riga e sulla sua colonna troviamo (almeno) k caselle segnate all'inizio

Immaginiamo di colorare di verde le righe e le colonne di queste caselle. Prima o poi segneremo, per la prima volta, una casella che non è verde. Sulla sua riga/colonna ci sono almeno $k-2$ caselle segnate all'inizio, tutte distinte dalle precedenti.

Andiamo avanti in questo modo: la i-esima casella considerata darà un contributo di $\geq k-2i+2$ caselle segnate all'inizio.

Quindi le caselle segnate all'inizio sono almeno

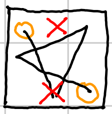
$$k+(k-2)+(k-4)+\dots+\begin{cases}0 & k \text{ pari}\\ 1 & k \text{ dispari}\end{cases}$$

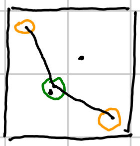
Facendo il conto si trovano le stesse quantità di sopra.

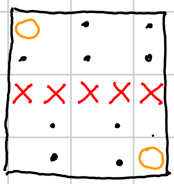
$\boxed{C5}$ Scacchiera $n\times n$, alcune caselle bloccate.

NO  . Allora un cavallo può andare dalla casella in alto a sx a quella in basso a dx?

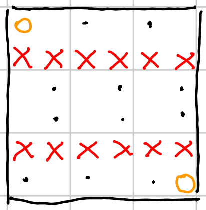
$n=2$ non ha molto senso

$n=3$  La risposta è NO

$n=4$  La risposta è SI

$n=5$  Da ogni casella con il punto va solo in caselle con il punto. La risposta è NO

$n=6$

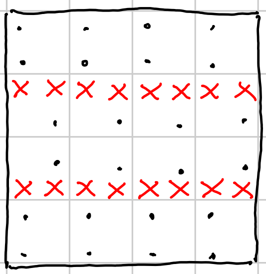


Risposta No

Idea: c'è un pattern modulo 3. Per $3k+1$ c'è la strada, altrimenti no.

Nel caso in cui non c'è la strada, uso barriere ogni 3 righe

$3k+2$



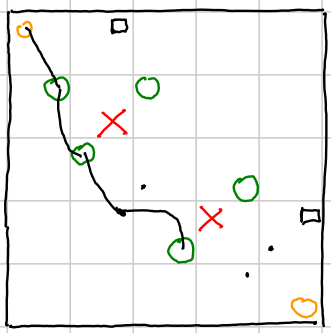
Si crea una "scacchiera" con caselle 2×1

Voglio che l'ultima casella abbia colore diverso dalla prima

Ha $k+1$ righe e $3k+2$ colonne. #"righe" + #"colonne" è dispari, quindi le caselle di arrivo e partenza sono diverse.

<u>Caso $3k$</u> Esercizio: si trova lo sbarramento

Caso $3k+1$



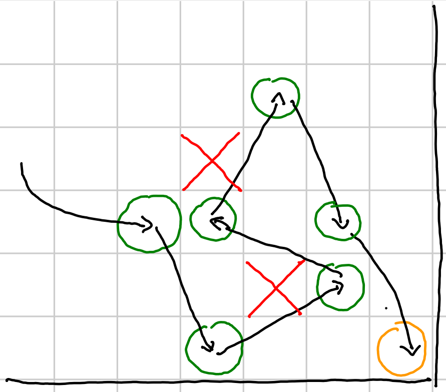
Considero sulla diagonale le caselle $(3h+1, 3h+1)$

Se una non è bloccata, per induzione ci arrivo (considerando le due ~~sottoscacchiere~~)

Quindi supponiamo che siano tutte bloccate.

Delle due caselle in cui posso muovere all'inizio, una è libera

Raggiungo una casella adiacente a quelle bloccate e poi salto facendo salti 3×3

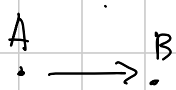


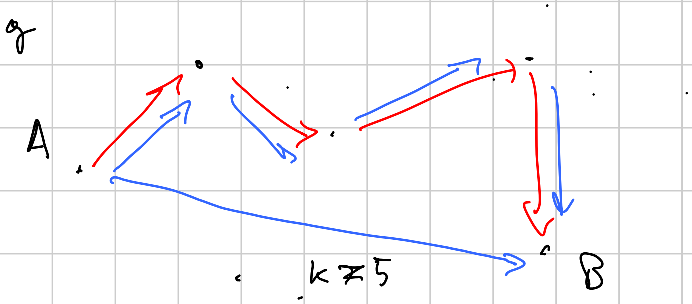
Dalla freccia dobbiamo raggiungere l'angolo.
Possiamo bloccare l'accesso diretto all'angolo, se no con 2 salti arrivo.
Ma allora trovo un percorso alternativo.

$n \geq 7$ punti per ogni coppia c'è un punto che li ha battuti entrambi

se $2(2^{(2^k)}-1) \geq n$ allora esiste un ciclo $A_1 \dots A_\ell$ in cui A_i ha battuto A_{i+1} e A_ℓ ha battuto A_1 per un qualche ℓ con $2 \le \ell \le 2k$

A ha battuto B





G Nuovo grafo orientato: $A \to B \iff$ esiste un cammino lungo al più k tra A e B nel grafo di prima (orientato)

Se nel vecchio grafo esisteva un ciclo lungo $2 \le \ell \le 2k$, nel nuovo ce n'è uno lungo 2 (e viceversa)

In queste condizioni, se non ci sono cicli da 2 per ogni sottoinsieme X di 2^k elementi, c'è un vertice che li ha battuti tutti.

Induzione: 2 per ipotesi

$2^{k-1} \longrightarrow 2^k$ $\quad |X| = 2^k \quad X = X_1 \cup X_2$

$|X_1| = |X_2| = 2^{k-1}$

allora esiste v_1 che ha battuto X_1 in al più

v_2 " " X_2 k-1 passi

e v che ha battuto v_1 e v_2 (o $v_1 = v_2$)

Lemma G grafo orientato con n vertici e senza cicli da 2. Sia m t.c. $\forall$ sottoinsieme $|X| = m$ esiste un v che ha frecce verso tutti gli elementi di X. Allora $2(2^m - 1) \leq n$

Dim Oss. se non ci sono cicli da 2, $d_e(v)$ = grado in entrata $\sum_{v \in V(G)} d_e(v) \leq \frac{n(n-1)}{2}$ Quindi

esiste un v $\quad d_e(v) \leq \frac{n-1}{2}$

Sia G' il sottografo dei vicini di v che lo hanno battuto.

Sia $|X| = m-1$ in G': allora $|X \cup \{v\}| = m$

e esiste w con frecce verso tutti gli el. di $X \cup \{v\}$

1) $w \to X$

2) $w \to v \quad w \in G'$] l'ipotesi è verif. per G'

$m = 1$ Allora $n \geq 2 d_e(v) + 1 \geq 2|G'| + 1 \geq 2(2 \cdot (2^{m-1} - 1)) + 1$

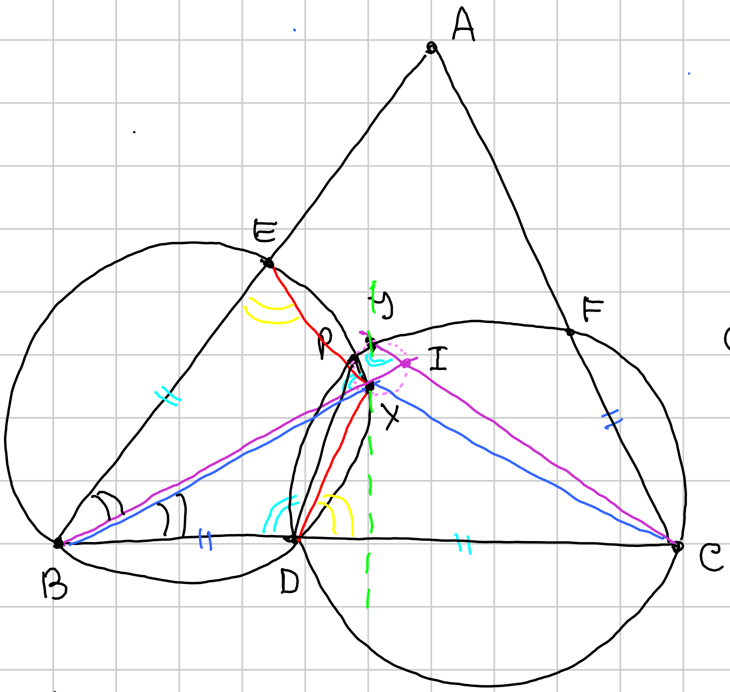
$\frac{n-1}{2} \geq 2 \cdot 2^{m-1} - 1 \quad n \geq 2 \cdot 2^m - 2 + 1 = 2 \cdot 2^m - 1$ $= 2 \cdot (2^m + 1$

Tesi $\Leftrightarrow$ lemma con $m = 2^k$ $\square$

Geometria Sintetica - WC 2019

Note Title 1/29/2019

(1)



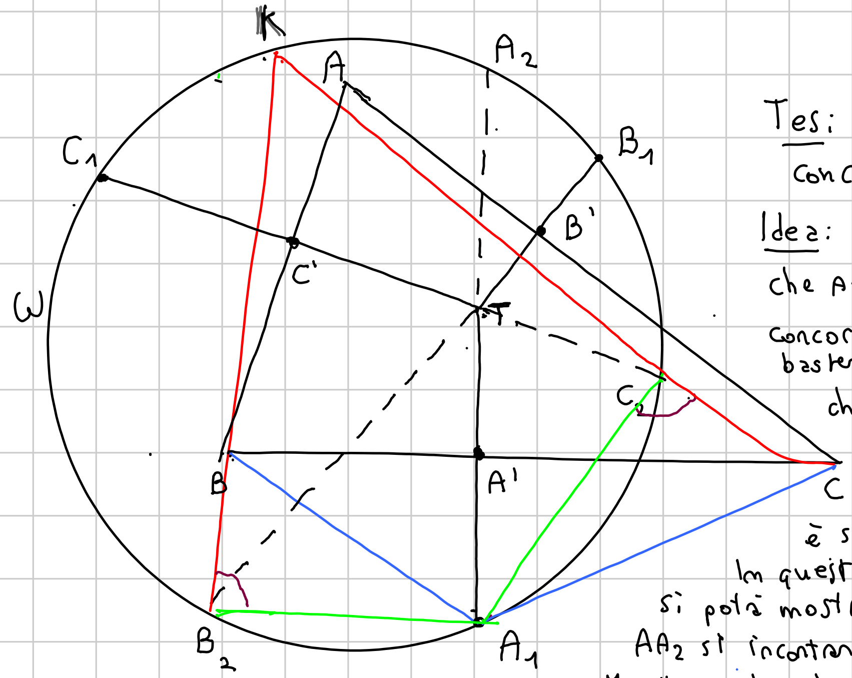
$\exists\, Q$: PQ costante

(*) $P\hat{Y}I = P\hat{D}B = P\hat{X}B$

$BX = XC$
poiché $\triangle BXE \cong$
$\cong \triangle CDX$

Oss. $X := \odot BDE \cap BI$ si può mostrare anche con un po' di trigonometria che X è fisso (indip. da B).
Poi si conclude come in (*).

2



$\underline{\text{Tesi}}$: AA_2, BB_2, CC_2 concorrono su ω.

$\underline{\text{Idea}}$: Per mostrare che AA_2, BB_2, CC_2 concorrono su ω, basterebbe mostrare che l'intersezione di BB_2 e CC_2, che chiamo k, è su ω. In questo modo analog. si potrà mostrare che BB_2 e AA_2 si incontrano in k' su ω. Ma allora $k = k'$ perchè stanno entrambi su ω e BB_2.

· $\underline{\text{Tesi 2}}$ $k := BB_2 \cap CC_2$ allora $K \in \omega$.

$\underline{\text{Oss.}}$ Questo vorrebbe dire che il quadrilatero $KB_2A_1C_2$ è ciclico.

Dunque per mostrare $\underline{\text{tesi 2}}$ basta mostrare $\boxed{\angle A_1C_2C = \angle A_1B_2B}$ (FINE)

$\underline{\text{Remind}}$: (d'ora in poi angoli orientati $\angle XYZ = \angle(XY, YZ)$ dove in generale $\angle(\ell, r)$ è l'angolo di cui si deve ruotare ℓ in senso antiorario per coincidere con r).

$\underline{\text{CLAIM}}$: $\overset{(*)}{} A_1\hat{B_2}B \sim A_1\hat{C_2}C$. Chiaramente CLAIM $\Rightarrow$ (FINE) e dunque basterebbe mostrare il CLAIM

$\underline{\text{Oss.}}$ $A_1\hat{B_2}B \sim A_1\hat{C_2}C \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} A_1\hat{B_2}C_2 \sim A_1\hat{B}C$ (**)

$$(**) \Leftrightarrow \frac{B_2A_1}{C_2A_1} = \frac{BA_1}{CA_1} + \angle B_2A_1C_2 = \angle BA_1C \Longleftrightarrow \frac{B_2A_1}{BA_1} = \frac{C_2A_1}{CA_1} + \angle B_2A_1B = \angle C_2A_1C \Longleftrightarrow (*)$$

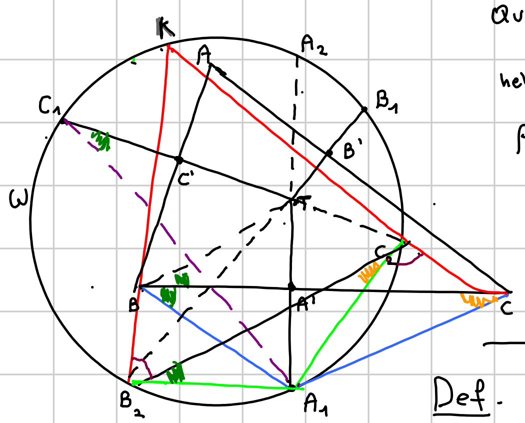
$\underline{\text{Tesi 3}}$: $A_1\hat{B_2}C_2 \sim A_1\hat{B}C$

$\underline{\text{Dim}}$: $\angle A_1BC = \frac{1}{2}\angle A_1BT = \angle A_1C_1T = \angle A_1B_2C_2$

A_1 è simmetrico di T rispetto a BC

B è il circocentro di A_1C_1T essendo l'intersezione di due assi di questo triangolo

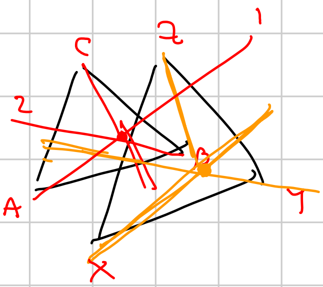
angoli alla cfr che vedono l'arco $\overset{\frown}{A_1C_2}$ in ω



Quindi questo viene da
$\frac{1}{2}$ angolo al centro = angolo alla cfr
nella cfr circoscritta a A, C, T

Analogamente $\angle A_1CB = \angle A_1C_2B_2$ ▪

Quindi
Tesi 3 $\Rightarrow$ CLAIM $\Rightarrow$ (FINE) $\Rightarrow$ TESI PEL PROBLEMA.



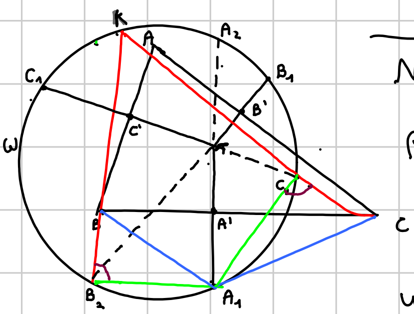
Def. ABC è ortologico su XYZ se
La perp. da A a YZ
La perp da B a XZ
La perp. da C a XY
concorrono (nel centro di ortologia di ABC su XYZ)

Es. 1 ABC è ortologico su XYZ
$\Updownarrow$
XYZ è ortologico su ABC

(*) **Es. 2** Se ABC e XYZ sono ortologici con stesso centro di ortologia cioè il c.d.o. di ABC su XYZ è = c.d.o. di XYZ su ABC, allora ABC e XYZ sono perspettici (AX, BY, CZ concorrono)

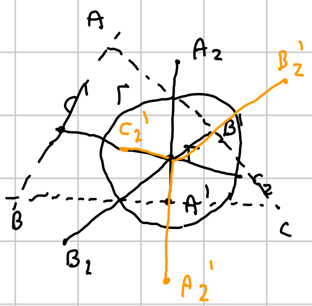
(**) **Es. 3** (Th. Sondat) Due triangoli ortologi con c.d.o. T_1, T_2 e perspettici con c. d. prospezione S soddisfano S, T_1, T_2 allineati

---



Nell'esercizio $A_2B_2C_2$ è ortologico su ABC perchè la perp. da A_2 a BC è la retta A_2T (e cicliche). Quindi T è il c.d.o. di $A_2B_2C_2$ su ABC
Per dimostrare AA_2, BB_2, CC_2 concorrono si potrebbe usare Es. 2 + T è anche il c.d.o. di ABC su $A_2B_2C_2$.

CLAIM $AT \perp B_2C_2$ (e cicliche)



Oss. $A_2T \cdot TA' = B_2T \cdot TB' = C_2T \cdot TC' = \frac{1}{2} Pow_{\omega} T$

Allora $TA' \cdot TA_2' = TB' \cdot TB_2' = TC' \cdot TC_2'$

Cioè $\exists$ cfr. Γ di centro T t.c. invertendo in lei
$A' \Leftrightarrow A_2'$ e cicliche.

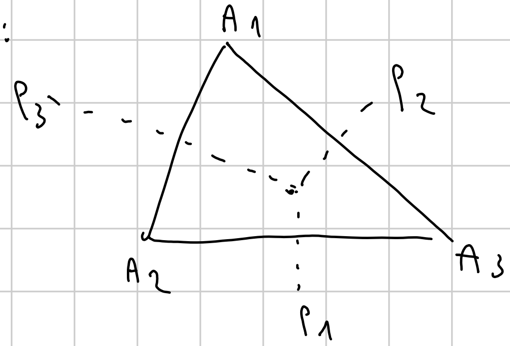
Allora BC è la polare di A_2' rispetto a Γ
AC " B_2' rispetto a Γ
AB " C_2' " (*)

(*) $A_2'B_2'$ è la polare di C rispetto a Γ (e cicliche) $\Rightarrow$ $A_2'B_2' \perp CT$
Ma $A_2B_2 \parallel A_2'B_2'$ e quindi $CT \perp A_2B_2$ (e cicliche) (CLAIM).

C(AIM) + ES. 2 $\Rightarrow$ AA_2, BB_2, CC_2 concorrono

Appr. alternativo

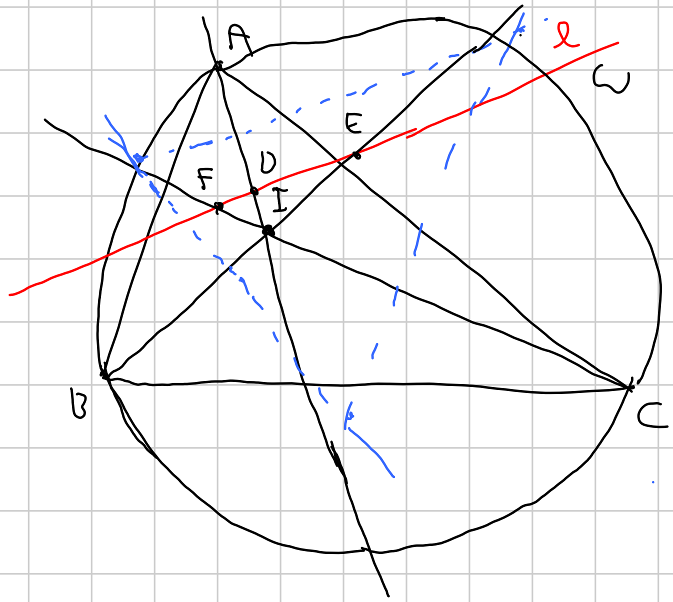
Lemma:



$\Rightarrow$ $\odot(A_2A_3P_1)$, $\odot(A_1A_3P_2)$, $\odot(A_1A_2P_3)$, $\odot(P_1P_2P_3)$
concorrono

e da qui si conclude

ESERCIZIO 3



$\tau = \Delta$ formato dagli assi di AD, BE, CF

Tesi: $\odot(\tau)$, ω tangono

oss: di τ "conosciamo" le direzioni dei lati

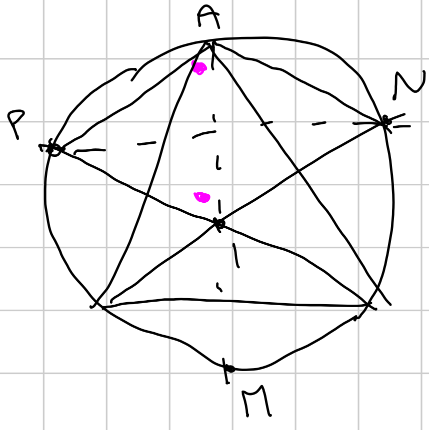
Vogliamo che $\odot(\tau)$, ω siano omotetiche tramite una φ di centro $P \in \odot(\tau), \omega$.

$(\varphi : \odot(\tau) \to \omega)$

Domanda: chi sarà $\varphi(\Delta\tau)$?

Avrà i lati $\perp$ a AI, BI, CI

$\Rightarrow$ è MNP, (M, N, P sono i pt. medi degli archi $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ di ω, ovvero $AI, BI, CI \cap \omega$)



$PA = PI$ e $NA = NI$

$\Rightarrow PN$ è l'asse di AI

Quindi vogliamo che $\overset{\Delta}{MNP}$, τ siano omotetici di centro $P \in \omega$

Strategia: Chi è $\varphi(\ell)$? Sarà parallela a ℓ.

Claim: $\varphi(\ell)$ passa per I.
<u>Dim</u>: Sia t la retta per I che sia $//$ a ℓ.
Voglio $t = \varphi(\ell)$.

Parentesi (Remind):

Fatto (retta di Simson): Quando le proiezioni di un punto P sui lati di ABC sono allineate?
$\Longleftrightarrow$ $P \in \odot(ABC)$

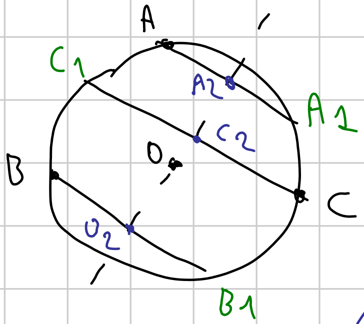
"Duale": Quando le simmetriche di una retta t rispetto a AB, BC, CA concorrono?

Se concorrono (in P), allora i simm. di P rispetto a AB, BC, CA stanno su t
$\Rightarrow$ le proiezioni di P sui lati sono allineate
$\Rightarrow$ $P \in \odot(ABC)$.

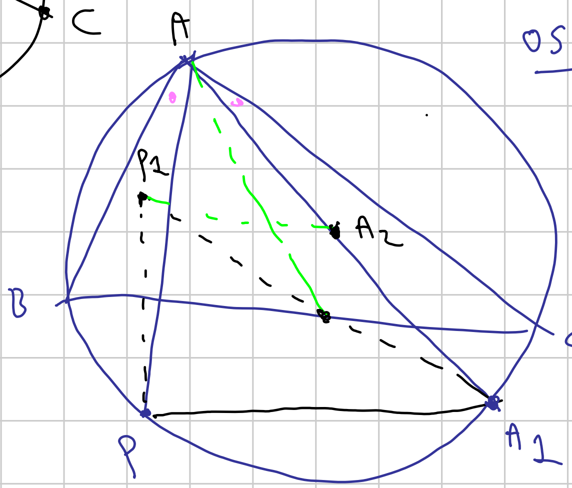
Fatto (noto): Se $P \in \odot(ABC)$, i suoi simmetrici risp. ai lati sono in effetti allineati, e questa retta passa per l'ortocentro H di ABC.

<u>OSS</u>: La retta di Simson di P biseca $\overline{PH}$

(Sketch: se prendo le simmetriche di AP, BP, CP risp. a Al, Bl, Cl rispettiv. esse sono parallele. Se queste intersecano ω in A_1, B_1, C_1 $\Rightarrow$ i pt. medi di $\widehat{AA_1}$, $\widehat{BB_1}$, $\widehat{CC_1}$ sono allineati su una retta che passa per O.

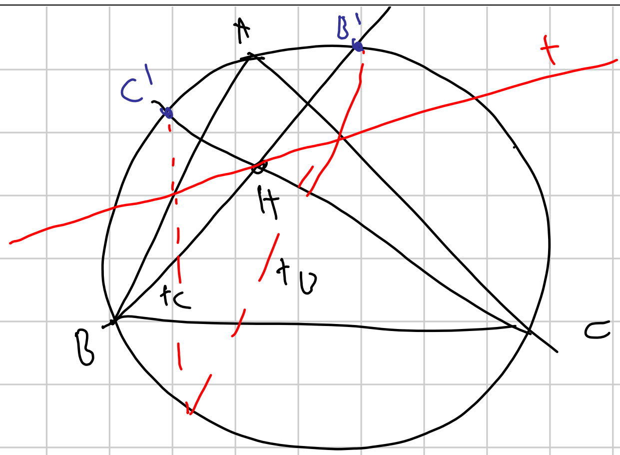


OSS: $PA_1 \parallel BC$



$\Rightarrow$ se P_1 è il simm. di P risp. a BC
P_1, A_1 sono simm. risp. al punto medio di BC $\Rightarrow$ il baricentro di AA_1P_1 coincide con quello di ABC (per Ceva), G
$\Rightarrow$ l'omotetia di centro G e fattore -2 (che manda O in H) manda $\overline{A_2B_2C_2O}$ in $\overline{P_1P_2P_3H}$ $\square$

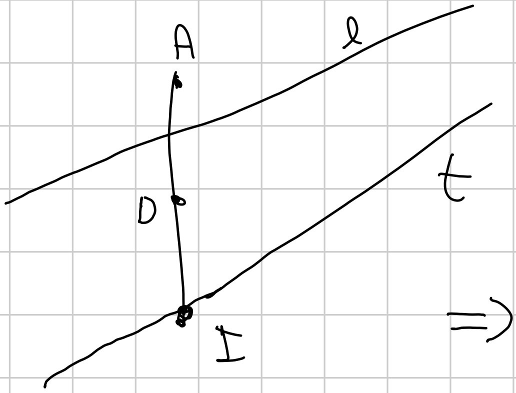
Viceversa: se t passa per H, le sue simm. risp. ai lati concorrono $\odot(ABC)$



(mi basta che l'angolo tra t_B, t_C sia lo stesso sotteso da $\widehat{B'C'}$, $= \pi - 2\angle A$)

Risposta alla domanda "duale":
se e solo se $H \in t$ e in tal caso il
pt. di concorrenza $\in \odot(ABC)$.

Ora, $NP \perp IM$ e analoghi $\Rightarrow I$ è
l'ortocentro di ΔMNP.
$\Rightarrow$ le simm. di t risp. a NP, PM, MN
concorrono. Le chiamo t_M, t_N, t_P.
$t_M \cap t_N \cap t_P = X \in \odot(MNP) = \omega$



Chi sono le simm. di l risp. ai lati di τ?

Sono proprio t_M, t_N, t_P!

$\Rightarrow l$ passa per l'ortocentro di τ

$\Rightarrow \varphi(l) = t$, come voluto.

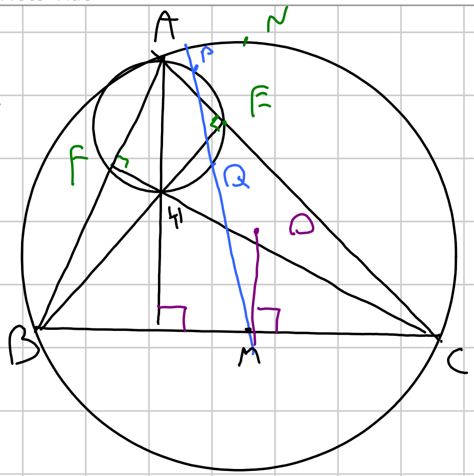
Inoltre il centro di φ è proprio X.
Infatti si vede che t_M è fissata da φ

$\Rightarrow$ Abbiamo un'omotetia centrata in $X \in \omega$ t.c. $\varphi(\omega) = \odot(\Delta T)$.

$\Rightarrow$ ω, ΔT sono tangenti.

Geometria contosa WC 2019

Note Title 1/28/2019



$N \in \bigcirc ABC$

Complessi

$a \in$ unitaria $\Rightarrow a \cdot \bar{a} = 1$

Riferito $\bigcirc AHFE$ circ. UNITARIA

$a\bar{a} = e\bar{e} = f\bar{f} = 1$

$h = -a$

Retta in complessi

$\overline{RT}$): $\dfrac{x - r}{t - r} = \dfrac{\bar{x} - \bar{r}}{\bar{t} - \bar{r}}$ $\quad \bar{t} = \dfrac{1}{t} \quad \bar{r} = \dfrac{1}{r}$

$(x - r)(\bar{t} - \bar{r}) = (\bar{x} - \bar{r})(t - r)$

$(x - r)\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{r}\right) = \left(\bar{x} - \dfrac{1}{r}\right)(\cancel{t - r})$

$\quad \overset{\shortparallel}{\dfrac{\cancel{r - t}}{rt}}$

$(x - r)\cdot(-1) = rt\left(\bar{x} - \dfrac{1}{r}\right)$

$r - x = rt\bar{x} - t \longrightarrow \bar{x} = \dfrac{t + r - x}{rt}$

$AF: \quad \bar{x} = \dfrac{a + f - x}{af} \qquad \dfrac{a + f - x}{f} = \dfrac{x + a - e}{e}$

$EH = \bar{x} = \dfrac{-a + e - x}{-a \cdot e} \qquad ea + ef - ex = xf + af - ef$

$b = \dfrac{2ef + af - ea}{e + f}$ $\quad$ coordinata di B

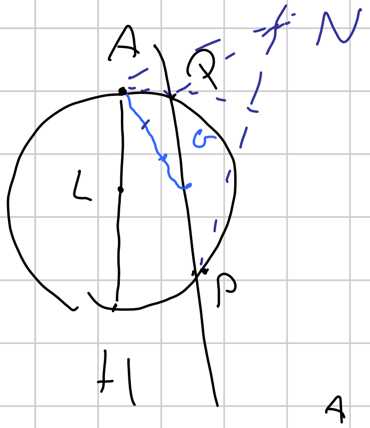
$c = \dfrac{2ef + ea - af}{e + f}$

$m = \frac{b+c}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{2ef + \cancel{af} - \cancel{ea} + 2ef + \cancel{ea} - \cancel{af}}{e+f} = \frac{2ef}{e+f}$

$M \in PQ$, $P, Q \in$ UNIT.

$pq\bar{m} = p+q-m$

Chi è l'ortocentro di APQ?



L, G, N allineati

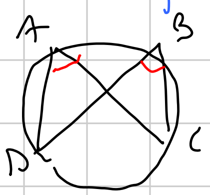
$NG = 2LG$

$L \to O$

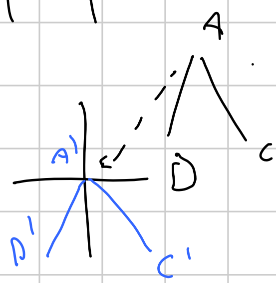
$G = \frac{a+p+q}{3} \Rightarrow N = 3G = a+p+q$

Ciclicità in complessi

Modo 1



$\arg\left(\frac{c-a}{d-a}\right) = \arg\left(\frac{c-b}{d-b}\right)$

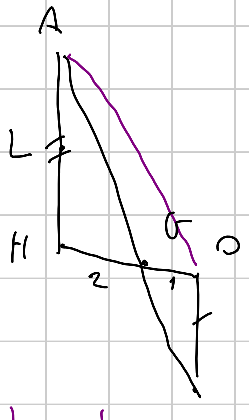


Modo 2: $|N-O| = R$

L pt medio di AH

$\Rightarrow ALMO$ parallelogramma

$AL = \frac{AH}{2} = \frac{2 \cdot OM}{2} = OM$



$\vec{A} + \vec{M} = \vec{L} + \vec{O}$.

$a + m = 0 + s$

$s = a + m$

Raggio di ABC? $R = AO = |a - s|$
$= |a - (a+m)| = |m|$

$M \in PQ$
$\downarrow$

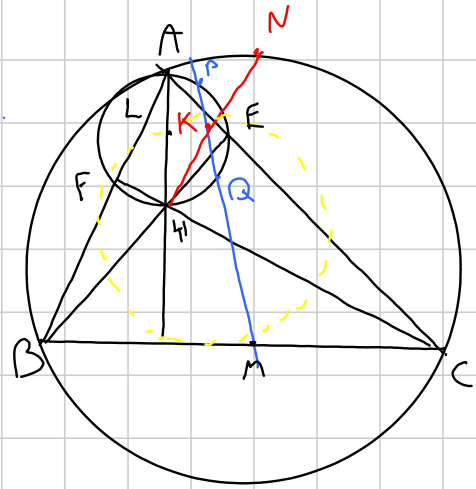
$N = a+p+q$ $\quad |N - O| = |a+p+q - (a+m)| = |p+q-m| = |pq\bar{m}|$

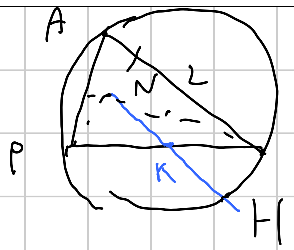
$|m| = m\bar{m}$

$|pq\bar{m}| = (pq\bar{m}) \cdot \overline{(pq\bar{m})} = pq\bar{m} \cdot \bar{p}\cdot\bar{q}\cdot m = (p\bar{p})(q\bar{q}) \cdot m\bar{m} = m\bar{m}$

$\quad\quad (p\bar{p}) = 1, \quad (q\bar{q}) = 1$

$|N - O| = |A - O|$





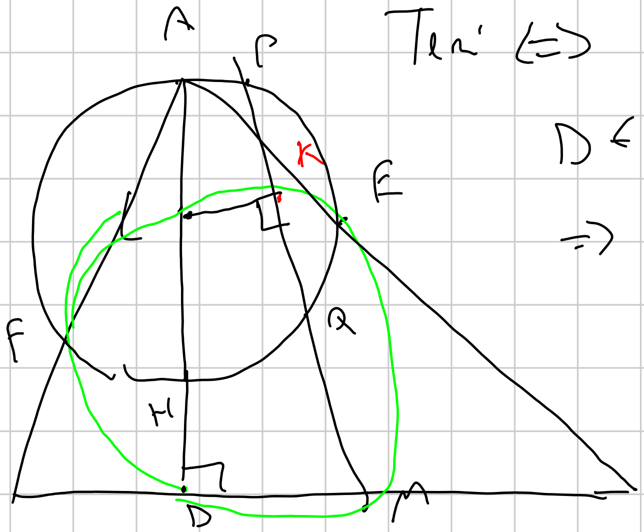
N K H allineati

NK = KH

Focus omotetia in H di fatt. $\frac{1}{2}$

$N \to K$

$\bigcirc_{ABC} \Rightarrow \text{Feuerbach}_{ABC} = \bigcirc_{FEM}$

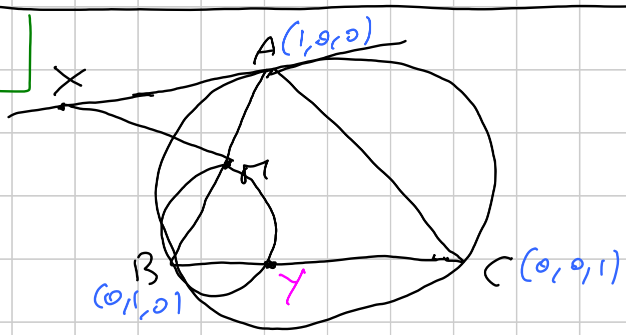


Tesi $\Leftrightarrow$ $K \in$ Feuerbach.

$D \in$ Feuerbach

$\Rightarrow K \in \bigcirc_{FEDM} \Rightarrow$ Tesi

Problema 2



"Idea": Trovare $\omega_B \cap BC = \{B, Y\}$. e dire che questo punto è simmetrico

$t_A: zb^2 + yc^2 = 0$ $\qquad X = (\alpha, b^2, -c^2) \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$M = (1, 1, 0)$

$\omega_B: \sum_{cyc} a^2 yz = (x+y+z)(ux + \underbrace{vy}_{} + wz)$

$B \in \omega_B \Rightarrow 0 = 1 \cdot v \Rightarrow v = 0$

$M \in \omega_B \Rightarrow c^2 = 2u \Rightarrow u = c^2/2$

$$xM: \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & b^2 & -c^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$xM: -xc^2 + yc^2 + z(b^2-\alpha) = 0$$

$$xM: yc^2 = xc^2 + z(\alpha - b^2)$$

$$b^2c^2xz + (xc^2 + z(\alpha-b^2))(a^2z + c^2x) = (2c^2x + z(\alpha+c^2-b^2))\left(\frac{c^2}{2}x + wz\right)$$

coeff $(x^2) = 0$

$\Rightarrow$ coeff $(xz) = 0$

$$b^2\cancel{c^2} + a^2\cancel{c^2} + \cancel{c^2}(\alpha - b^2) = 2\cancel{c^2}w + \frac{\cancel{c^2}}{2}(\alpha + c^2 - b^2)$$

$$a^2 + \alpha = 2w + \frac{\alpha}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{2}$$

$$w = \frac{2a^2 + \alpha + b^2 - c^2}{4}$$

$BC: x = 0$

$$\omega_B: a^2yz + b^2xz + c^2xy = (x+y+z)\left(\frac{c^2}{2}x + \frac{2a^2+\alpha+b^2-c^2}{4}z\right)$$

$$a^2y\cancel{z} = (y+z)w\cancel{z} \qquad (z = 0 \text{ è } B)$$

$$4a^2y = (y+z)(2a^2+\alpha+b^2-c^2)$$

$$y(2a^2 - \alpha + c^2 - b^2) = z(2a^2 + \alpha + b^2 - c^2)$$

$$X = (-\alpha, -b^2, c^2)$$

$$z(2a^2 + \alpha + b^2 - c^2) = y(2a^2 - \alpha + c^2 - b^2)$$

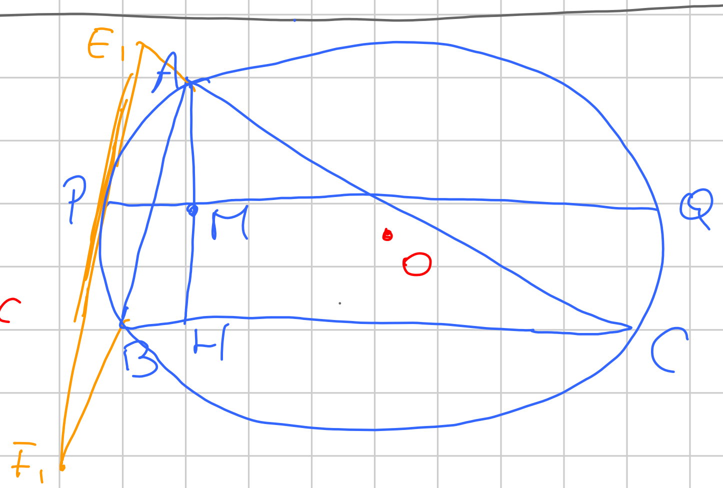
Ma è la stessa, quindi si intersecano su BC.

Problema 3

Vogliamo che

$O \in$ asse radicale

$\hookrightarrow$ circocentro di ABC



$P=(\alpha,\beta,\gamma)$ $\qquad \sum_{cyc}' a^2\beta\gamma = a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0$

$H=(0,S_C,S_B)$ $\qquad S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$

$A \doteq (a^2,0,0)$ $\qquad M=(a^2,S_C,S_B)$ $\qquad \infty_{BC}=(0,1,-1)$

retta all'∞: $x+y+z=0$ $\qquad PQ: x=y+z$

$\alpha=\beta+\gamma$

SDOPPIAMENTO

$yz \mapsto y_0z+z_0y$

$t_P: \sum_{cyc}' a^2(\beta z+\gamma y)=0$ $\qquad t_P: \sum_{cyc}' x(\overbrace{b^2\gamma+c^2\beta}^{T_A})=0$

$T_AT_B = (b^2\gamma+c^2\beta)(c^2\alpha+a^2\gamma) = c^2\left(\cancel{\sum_{cyc} a^2\beta\gamma}\right) + a^2b^2\gamma^2$

$T_AT_B = a^2b^2\gamma^2$

$\{E_1\}=t_P\cap AC \rightsquigarrow E_1=(-T_C,0,T_A)$

$F_1=(-T_B,T_A,0)$

$\Gamma=\odot AE_1F_1: \sum_{cyc}' a^2yz = (x+y+z)(vy+wz)$

$-b^2\cancel{T_A}T_C = (T_A-T_C)w\cancel{T_A}$

$w=\frac{b^2T_C}{T_C-T_A}$ $\qquad v=\frac{c^2T_B}{T_B-T_A}$

A meno di costante $\operatorname{Pot}_\Gamma(O) = \sum_{cyc}' a^2yz - \left(\sum_{cyc}' x\right)(vy+wz)$

Calcolato in O.

$O=(a^2S_A, b^2S_B, c^2S_C)$ $\qquad 2\sum_{cyc}' S_AS_B = \sum_{cyc}' a^2S_A = 2S$

$a^2b^2c^2S - 2S\left(\frac{b^2T_C}{T_C-T_A}c^2S_C + \frac{c^2T_B}{T_B-T_A}b^2S_B\right)$

$a^2 - 2\left(\frac{T_CS_C}{T_C-T_A} + \frac{T_BS_B}{T_B-T_A}\right) =$

$= a^2 - 2\,\frac{S_CT_C(T_B-T_A)+S_BT_B(T_C-T_A)}{T_BT_C-T_AT_B-T_AT_C+T_A^2}$

$T_A=b^2\gamma+c^2\beta$

$$T_A T_B = a^2 b^2 \gamma^2 \qquad T_B T_C = b^2 c^2 \alpha^2 \qquad T_A T_C = a^2 c^2 \beta^2$$

$$\cancel{a^2} - 2\, \frac{\cancel{a^2} b^2 c^2 \alpha^2 - S_C \cancel{a^2} c^2 \beta^2 - S_B \cancel{a^2} b^2 \gamma^2}{b^2 c^2 \alpha^2 - a^2 b^2 \gamma^2 - a^2 c^2 \beta^2 + b^4 \gamma^2 + c^4 \beta^2 + 2 b^2 c^2 \beta \gamma}$$

$$1 - 2\, \frac{\beta^2 (\overbrace{b^2 c^2 - S_C c^2}^{c^2 S_A}) + \gamma^2 (\overbrace{b^2 c^2 - S_B b^2}^{b^2 S_A}) + 2 \beta \gamma b^2 c^2}{\beta^2 (\underbrace{b^2 c^2 - a^2 c^2 + c^4}_{2 c^2 S_A}) + \gamma^2 (\underbrace{b^2 c^2 - a^2 b^2 + b^4}_{2 b^2 S_A}) + 4 \beta \gamma b^2 c^2} =$$

$$= 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Non dipende da α, β, γ. (In particolare $O \in \odot AE_1F_1$)

WC 2019 Teoria dei Numeri

Note Title 1/27/2019

PROBLEMA N4

$x \in \mathbb{Q} \longrightarrow$ ESISTE UNA SEQUENZA $x_0, x_1, x_2, \dots$ TALE CHE:

$x_0 = x$

$x_n = 2x_{n-1}$ o $x_n = 2x_{n-1} + \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 1$

$\exists\, n \geq 1$ t.c. x_n È INTERO

SE NOI ABBIAMO $\frac{a}{b}$:

STRATEGIA: "DIMINUIRE" b (IN QUALCHE SENSO)

$$\frac{a}{b} \nearrow \frac{2a}{b}$$

$$\frac{a}{b} \searrow \frac{2a}{b} + \frac{1}{n} = \frac{2an+b}{bn}$$

→ BISOGNA SCEGLERE n GIUSTO

$$\frac{a}{b} = x_n$$

$$x_{n+k} = \frac{a \cdot 2^k}{b}$$

ALTRA OSSERVAZIONE (OVVIA): A UN CERTO PUNTO b DIVENTERÀ DISPARI.

CONSEGUENZA: SE b È UNA POTENZA DI 2 HO FINITO.

INDUZIONE: SUL PIÙ GRANDE FATTORE PRIMO DI b (CON MOLTEPLICITÀ).

SUPPONIAMO DI SAPERE CHE SE:

$b = m \cdot p^k$ CON

$p >$ QUALSIASI PRIMO CHE DIVIDE m

LA TESI È VERA PER OGNI $x = \frac{c}{d}$ CON

$d = \tilde{m} \cdot p^j$ CON $j < k$ E $\tilde{m}$ CON

PRIMI MINORI DI p.

SCRITTA COSÌ NON BASTA:

BISOGNA ASSUMERE CHE QUESTO PER OGNI PUNTO DI PARTENZA:

NON PIÙ $x_0 = x$, MA $x_n = x$

PASSO BASE:

$p = 2 \to \quad x_n = \dfrac{a}{2^k} \implies$ FINE

PASSO INDUTTIVO:

$x_n = \dfrac{a}{b}$ CON $b = m \cdot p^k$

CON FATTORI PRIMI DI $m < p$

$$x_{n+j} = \frac{2^j a}{b}$$

ALLA PRIMA MOSSA DEL II TIPO, ABBIAMO:

$$X_{n+r} = \frac{2^r \cdot a}{b} + \frac{1}{n+r} =$$

$$= \frac{(n+r) \cdot 2^r \cdot a + b}{b(n+r)} = \frac{(n+r) \cdot 2^r \cdot a + m \cdot p^k}{m \cdot p^k \quad (n+r)}$$

VORREMMO $n+r$ DELLA FORMA ADEGUATA:

$$\frac{1}{p^k m} + \frac{1}{n} = \frac{c}{p^{k-1} d} \quad \text{con } (d,p)=1$$

DOBBIAMO SCEGLIERE $n = p^k \cdot J$ CON $(J,p)=1$

$$n+r = p^k \cdot s$$

$$\frac{\cancel{p^k} \cdot s \cdot 2^{(p^k \cdot s - n)} \cdot a + m \cdot \cancel{p^k}}{n \cdot p^k \cdot \cancel{p^k} \cdot s} =$$

$$= \frac{m + a \cdot s \cdot 2^{(p^k \cdot s - n)}}{m \cdot p^k \cdot s}$$

VOGLIAMO:

- s NON ABBIA FATTORI PRIMI $\geq p$
- $\boxed{m + a \cdot s \cdot 2^{(p^k \cdot s - n)} \equiv 0 \quad (p)}$

$$s = \underbrace{(p-1)} \cdot t \quad \checkmark$$

$$m + a \cdot (p-1) \cdot t \cdot 2^{(t(p-1)p^k - n)} \equiv$$

$$m - at \cdot 2^{-n} \quad (p)$$

SCELGO t TALE CHE

$$\boxed{m - at \cdot 2^{-n} \equiv 0 \quad (p)}$$

QUESTO È POSSIBILE QUANDO:

- $m \not\equiv 0\ (p)$ ✓
- $2 \not\equiv 0\ (p)$ ✓ $p>2$
- $a \not\equiv 0\ (p)$ ✓ $(a,b)=1$

TROVIAMO t T.C. $t \equiv T\ (p)$

CON $0<T<p$ CHE SODDISFA

LA CONGRUENZA.

DOBBIAMO DIRE CHE IL t CHE SCEGLIAMO

PUÒ ESSERE ARBITRARIAMENTE GRANDE.

SE TROVIAMO t ANCHE $t \cdot 2^{p-1}$ FUNZIONA.

ESISTE UN t ARBITRARIAMENTE GRANDE.

$\boxed{N5}$ $a_1, a_2, \ldots, a_K$ SONO LE POTENZE DI a MODULO p,

SE SONO ANCHE UNA PROGRESSIONE ARITMETICA (IN QUALCHE ORDINE) MODULO p

σ PERMUTAZIONE DI $\{1, \ldots, K\}$:

$\exists\, a, b$ t.c. $a + ib \equiv a_{\sigma(i)} \ (p)$

$\forall\ 1 \leq i \leq K$

ALLORA $K = p-1$ (CIOÈ I RESIDUI SONO TUTTI $\Longleftrightarrow$ a È UN GENERATORE)

$a \neq 1, -1, \Longleftrightarrow K > 2$

$a_1 = 1$ $\qquad\qquad$ $a_1 = 1 \quad a_2 = -1$

PER LIBERARSI DELL'ORDINE DEGLI a_i, CONSIDERIAMO LE SOMME SIMMETRICHE A LORO ASSOCIATE.

AD ESEMPIO:

FUNZIONI SIMM. ELEMENTARI

a, b, c: $\quad a+b+c$

$$ab+ac+bc$$

$$abc$$

COEFF. DI $(x-a)(x-b)(x-c)$

(SEGNI ALTERNI)

SE $A, B \subseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ CON $|A|=|B|=r$

ALLORA $A=B \iff$ LE r SOMME SIMMETRICHE ELEMENTARI (NEI LORO ELEMENTI) COINCIDONO

$$\prod_{a\in A}(x-a) \equiv \prod_{b\in B}(x-b) \quad (p)$$

SE $x < p$ LO STESSO RISULTATO SI PUÒ DIRE CON LE POTENZE SIMMETRICHE (SOMME DI NEWTON):

a, b, c: $a+b+c$

$a^2+b^2+c^2$

$a^3+b^3+c^3$

$\ldots$

VALE LO STESSO RISULTATO DI PRIMA (SE $x<p$) CON LE POTENZE SIMMETRICHE.

SE $a_1, a_2, \ldots, a_k$ SONO LE POTENZE DI a, ALLORA:

$$\prod_{i=1}^{k} (x - a_i) \equiv x^k - 1 \ (p)$$

CON $k \mid p-1$, $k > 2$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \equiv 0 \ (p)$$

a_i RADICI DI $x^n - cx^{n-1} + \dots$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = c$$

(ANCHE MODULO p)

È LO SVILUPPO DEL PRODOTTO

IL SECONDO TERMINE $(k \geq 2)$:

$$0 \equiv \sum_{i<j} a_i a_j \quad (p)$$

$$2\sum_{i<j} a_i a_j = \cancel{\sum a_i^2} + \sum_{i \neq j} a_i a_j$$

$$\sum_{i<j} a_i a_j = \frac{\left(\sum a_i\right)^2 - \left(\sum a_i^2\right)}{2} = \frac{-\sum \cancel{a_i^2}}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \equiv 0 \quad (p)$$

TUTTE LE FUNZIONI SIMMETRICHE DI GRADO $\leq n$ SI SCRIVONO COME SOMME E PRODOTTI DELLE FUNZIONI SIMMETRICHE ELEMENTARI DI GRADO $\leq n$

$$\alpha_i = a + ib \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$b \not\equiv 0 \quad (p)$$

$$0 \equiv \sum_{i=1}^{k} (a + ib) \equiv ka + \frac{k(k+1)}{2} b \quad (p)$$

$$0 \equiv \sum_{i=1}^{k} (a + ib)^2 \equiv \sum_{i=1}^{k} a^2 + 2ab \cdot i + b^2 \cdot i^2 \equiv$$

$$\equiv \cancel{k} a^2 + 2ab \cdot \frac{\cancel{k}(k+1)}{2} + b^2 \cdot \frac{\cancel{k}(k+1)(2k+1)}{6} \quad (p)$$

$$\cancel{k} a + \frac{\cancel{k}(k+1)}{2} b \equiv 0 \quad (p) \qquad 3 \leq k \leq p-1$$

$$a \equiv -b \cdot \frac{(k+1)}{2} \quad (p)$$

$$\cancel{b}^2 \left(\frac{(k+1)^2}{4} - \frac{(k+1)^2}{2} + \frac{(k+1)(2k+1)}{6} \right) \equiv 0 \; (p)$$

$$b \not\equiv 0 \quad (p)$$

$$-3(k+1)^2+2(k+1)(2k+1)\equiv 0\ (p)$$

$$(k+1)(4k+2-3k-3)\equiv 0\ (p)$$

$$(k+1)(k-1)\equiv 0\ (p)$$

O $k\equiv 1\ (p) \to k=1$ CONTRO LE IPOTESI

O $k\equiv -1\ (p) \to k=p-1$

N6. $k > 2$ $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = k \\ a_{n+1} = (k+1)\, a_n - a_{n-1} \end{cases}$

$\rightsquigarrow \quad t^2 - (k+1)t + 1 = 0$

Radici: $\dfrac{k+1 \pm \sqrt{k^2+2k-3}}{2}$

Per $k=2$: 1 1 2 3 5 8 13 21 34

Radici: $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \left(\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2$

$$\frac{2k+2 \pm 2\sqrt{(k+3)(k-1)}}{4} = \left(\frac{\sqrt{k+3} \pm \sqrt{k-1}}{2}\right)^2$$

$\alpha, \ \beta$

$\alpha \cdot \beta = 1$

$$a_n = c_1 \cdot \alpha^{2n} + c_2 \cdot \beta^{2n}$$

$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ $\quad \left(\begin{array}{l} a_2 = (k+1)\, a_1 - a_0 \\ k = (k+1) \cdot 1 - a_0 \end{array} \right)$

$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 \alpha^2 + c_2 \beta^2 = 1 \end{cases}$ $\quad c_2 = \dfrac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - \beta^2} = \dfrac{\alpha^2 - \alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$c_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

$$a_n = \frac{\beta \cdot \alpha^{2n}}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha \cdot \beta^{2n}}{\alpha+\beta} = \boxed{\frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{\alpha+\beta}}$$

$$a_3 = k^2+k-1 \equiv -1 \ (k)$$

$$a_4 = k^3+2k^2-k-1 \equiv -1 \ (k)$$

Consideriamo a_n mod k:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1, & 0, & -1, & -1, & 0, & 1, & 1, & 0, & -1, & -1, & 0, & \dots \\ & \uparrow & & & \uparrow & & & \uparrow & & & & \\ & 2 & & & 5 & & & 8 & & & & \end{array}$$

$n \equiv 2 \pmod 3$

Se $d \mid 2n-1$

$$\frac{\alpha^d+\beta^d}{\alpha+\beta} \ \Big| \ \frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{\alpha+\beta}$$

Rapporto: $$\frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{\alpha^d+\beta^d} = \alpha^{d(r-1)} - \alpha^{d(r-2)} \cdot \beta^d + \dots + \beta^{d(r-1)}$$

$$r := \frac{2n-1}{d}$$

LEMMA $d \mid 2n-1 \implies a_{\frac{d+1}{2}} \mid a_n$

Sia $p \mid 2n-1$. Allora $a_{\frac{p+1}{2}} \mid a_n$, e se

$a_n = k^m$, allora $a_{\frac{p+1}{2}} \mid k^m$.

Se $\frac{p+1}{2} \not\equiv 2\,(3)$, allora $\left(a_{\frac{p+1}{2}}, k\right) = 1$,

assurdo.

Se $\frac{p+1}{2} \equiv 2\ (3) \implies p \equiv 3\,(3) \implies p = 3$

Siccome questo vale $\forall p$ che divide $2n-1$

$\implies 2n-1 = 3^a$

- $a = 1 \implies n = 2$ ovvio
- $a \geq 2 \implies 9 \mid 2n-1 \implies a_{\frac{9+1}{2}} \mid a_n$

$$a_5 = k\,(\overbrace{k^3+2k^2-3}^{\geq 13}) \qquad \underbrace{}_{(\,\cdot\,,\,k)\,=\,3}$$

$\implies$ c'è un primo che divide a_5 ma non k, assurdo

DIM LEMMA • $\alpha^{2n} + \beta^{2n}$ e' intero $\forall n$

$$\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} = (\alpha^2+\beta^2)(\alpha^{2n}+\beta^{2n}) - (\alpha^{2n-2}+\beta^{2n-2})$$

• $$\frac{\alpha^9+\beta^9}{\alpha^3+\beta^3} = \alpha^6 - \alpha^3\beta^3 + \beta^6$$

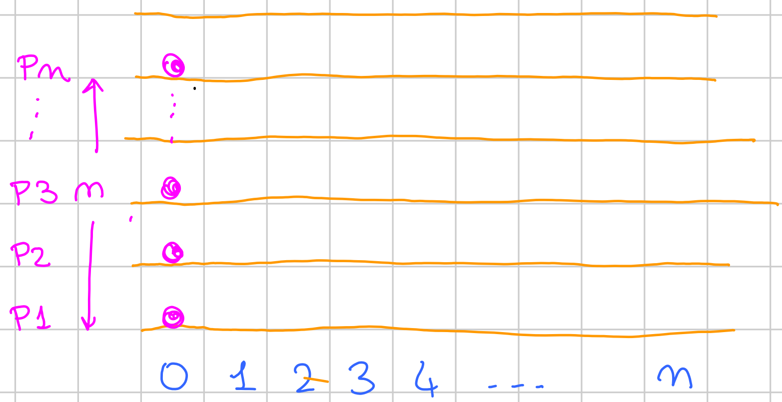
$$\frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{\alpha^d+\beta^d} = \text{combinazione di } (\alpha^{\text{pari}}+\beta^{\text{pari}})$$

$\square$

WC 2019 — MISCELLANEA (by Max)

Note Title 1/29/2019

M1 SISIFO



Numero minimo mosse $\geq \left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil$

\# mosse per avanzare a passo di 1

... a passo di 2

È come se:

→ la pietra in fondo fa sempre passi da 1

→ la pietra subito sopra " " " " 2

→ " " " 3

Quando ho un mucchio di k pietre, sposto quella con indice + alto.

Questo indice sarà $\geq k$

Quindi in ogni mossa la pietra P_n che si muove si sposta di $\leq n$ scatole.

P_1 ci mette $\geq \left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil$ mosse

P_2 ci mette $\geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ mosse e così via.

M2 : Eq. FUNZIONALE

$$f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right) f(y) = f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right)$$

1ª SOLUZIONE SISTEMONE: scrivo varie eq. che contengono $f(t)$, $f(2t)$, $f(t^2)$, $f(\dots)$ e spero di avere tante eq. quante incognite

Oss. preliminare: tutte le $f(x) = Ax + B\frac{1}{x}$ sono ok

L'idea è di avere un sistema in $f(t)$, $f(at)$, $f(t^2)$, $f(at^2)$

$$P(t,t) \Rightarrow \left(t+\frac{1}{t}\right) f(t) = \boxed{f(t^2)} + f(1)$$

$$P\left(\frac{a}{t}, at\right) \Rightarrow \left(\frac{a}{t}+\frac{t}{a}\right) f(at) = f(a^2) + \boxed{f(t^2)}$$

$$P(at,t) \Rightarrow \left(at+\frac{1}{at}\right) f(t) = \boxed{f(at^2)} + f\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$P(t,at) \Rightarrow \left(t+\frac{1}{t}\right) f(at) = \boxed{f(at^2)} + f(a)$$

4 eq. in 4 incognite $\Rightarrow$ risolvo

$$\left(t+\frac{1}{t}\right) f(t) = f(1) - f(a^2) + \left(\frac{a}{t}+\frac{t}{a}\right)\boxed{f(at)}$$

$$\left(at+\frac{1}{at}\right) f(t) = f\left(\frac{1}{a}\right) - f(a) + \left(t+\frac{1}{t}\right)\boxed{f(at)}$$

Eliminando $f(at)$ ottengo

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)^2 f(t) - \left(t+\frac{1}{t}\right)\left[f(1)-f(a^2)\right] =$$

$$= \left(at+\frac{1}{at}\right)\left(\frac{a}{t}+\frac{t}{a}\right) f(t) - \left(\frac{a}{t}+\frac{t}{a}\right)\left[f\left(\frac{1}{a}\right)-f(a)\right]$$

$$f(t)\underbrace{\left\{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-\left(at+\frac{1}{at}\right)\left(\frac{a}{t}+\frac{t}{a}\right)\right\}}_{\text{MIRACOLO: SE NE VANNO LE } t \text{ !!!}} = At+\frac{B}{t}$$

(Se anche non se ne andavano, avevo comunque una formula da verificare

— o — o —

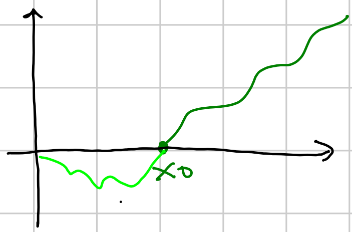
$\boxed{2^o \text{ metodo}}$ Supponiamo che f si annulli, cioè $f(x_0)=0$

$$P(x,x_0) \Rightarrow \boxed{f(x x_0) = -f\left(\frac{x_0}{x}\right)}$$ SIMMETRIA !!

Supponiamo che f si annulli 2 volte

$f(x_0) = f(y_0) = 0$

con $x_0 \neq y_0$.



DOPPIA SIMMETRIA: tanti annullamenti, e quindi ancora + simmetrie!

Speranza: se si annulla almeno 2 volte, allora $f \equiv 0$

Se dimostro la speranza ho finito. Perché ?

Conclusione

- Se $f(x)$ e $g(x)$ sono soluz., allora $f(x)+g(x)$ è soluzione ("f compare solo di 1° grado nell' eq.)
- $Ax + B\frac{1}{x}$ sono tutte soluzioni
- Se $f(x)$ è soluzione, allora $\overbrace{f(x) + Ax + B\frac{1}{x}}^{g(x)}$ è soluzione, e posso scegliere A e B in modo che

$$g(\pi) = g(2019) = 0$$

Se vale la speranza $g(x) \equiv 0$.

—o—o—

Parentesi: in un contesto additivo, doppia simmetria $\Rightarrow$ periodicità.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f(x_0+t) = \pm f(x_0-t)$$
$$f(y_0+t) = \pm f(y_0-t)$$
$\Rightarrow f$ è periodica

$$f(x_0+\underbrace{t}) = f(x_0-t) = f(y_0 + (x_0-y_0-t))$$
$$= f(y_0 - (x_0-y_0-t)) = f(2y_0 - x_0 + \underbrace{t})$$

$$f(t) = f(x_0 + \underbrace{(t-x_0)}) = f(2y_0 - x_0 + \underbrace{t - x_0})$$
$$= f(2y_0 - 2x_0 + t)$$

Nel nostro contesto moltipl., con gli stessi passaggi

$$f(x_0 t) = -f\left(\frac{x_0}{t}\right) \qquad f(y_0 t) = -f\left(\frac{y_0}{t}\right)$$

$$\leadsto \quad f(t) = f\left(\frac{y_0^2}{x_0^2} t\right) \qquad f(t) = f(\underset{\text{fisso}}{\alpha} t)$$

Tornando all'eq.

$$\left(\alpha x + \frac{1}{\alpha x}\right) f(y) = f(\alpha x y) + f\left(\frac{y}{\alpha x}\right)$$

$$= f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right) f(y)$$

Se $\exists\, y$ t.c. $f(y) \neq 0$, lo scelgo e semplifico e il resto non può essere vero $\forall x$ se $\alpha \neq 1$.

$\boxed{M3}$

$$M(p) := \frac{2}{p-1} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ \frac{k^{4038}}{p} \right\}$$

assume infiniti valori per ogni p.

(1) Cerco di fare in modo che tutte le classi k^{4038} siano DISTINTE

(1.1) Possiamo fare in modo che k^{2019} siano tutte distinte?

Fatto noto: $k \to k^a$ è iniettiva mod $p \iff (a, p-1) = 1$

Posso fare in modo che $(2019, p-1) = 1$?

Basta scegliere $p \equiv 2 \pmod{2019}$ 25

(1.2) Quando faccio il $\square$, rimangono distinte?

Può accadere che

$$k_1^{2019} = -k_2^{2019} = (-k_2)^{2019}\ ?$$

cioè $\iff k_1 = -k_2$, il che è impossibile data la restrizione su k.

(1.3) I numeratori sono tutti e soli i residui quadratici $(\text{mod } p)$.

(2) Sommare i residui quadr. mod p

Supponiamo che r residuo $\Rightarrow p - r$ residuo.

Allora so sommare

$$\sum_{r \in R} r = \sum_{r \in R} p - r = p \cdot \frac{p-1}{2} - \sum_{r \in R} r$$

$$\rightsquigarrow \quad \sum_{r \in R} r = \frac{p(p-1)}{4} \quad \Rightarrow \quad M(p) = \frac{1}{2}$$

Quindi ho finito se trovo ∞ primi p t.c.

- $p \equiv 2 \pmod{2019}$
- vale la simm. dei residui mod p

  Questa vale $\Leftrightarrow$ -1 è un residuo

  $\Leftrightarrow$ $p \equiv 1 \pmod 4$

DIRICHLET completa l'opera.

(Esistono ∞ primi del tipo $an+b$ se $(a,b)=1$)

— o — o —