A

WC20 Pol

Note Title 22/01/2020

Trovare interi positivi K t.c.

A4 $\quad 0 \le F(\{0,1,2,\dots K+1\}) \le C \Rightarrow F(0)=F(1)=\dots=F(K+1)$

Due valori tra $F(0), F(1), \dots F(K+1)$ sono uguali

$$K+1-0 \mid \underbrace{F(K+1)-F(0)}_{\le K \text{ in val. ass.}} \qquad \Rightarrow \quad F(0)=F(K+1)$$

$$F(x)=F(0)+x(K+1-x)\,G(x) \qquad G(x)\in\mathbb{Z}[x]$$

$c\in\{1,2,\dots K\}$

$$0\ne F(c)-F(0)=c(K+1-c)\,\widetilde{G(c)}$$

$$|F(c)-F(0)|\ge c(K+1-c) \quad (\text{se } F(c)\ne F(0))$$

Per $c=2$: $\quad K \ge |F(2)-F(0)| \ge 2(K+1-2)$

$$K\ge 2K-2 \qquad K\le 2$$

$\Rightarrow$ se K è 3 o più, $F(2)=F(0)=F(K+1)$

$$K\ge |F(c)-F(0)|\ge c(K+1-c)$$

$$c^2-c\ge (c-1)K \qquad K\le \frac{c^2-1}{c-1}=c+1$$

$p(x) = x(2-x)$

x	$p(x)$
-1	-3
0	0
1	1
2	0
3	-3

$K=1$ non magico

$F(\{0,1,2\}) = \{0,1\}$

$p(x) = x(3-x)$

x	$p(x)$
-1	-4
0	0
1	2
2	2
3	0
4	-4

$K=2$ non magico

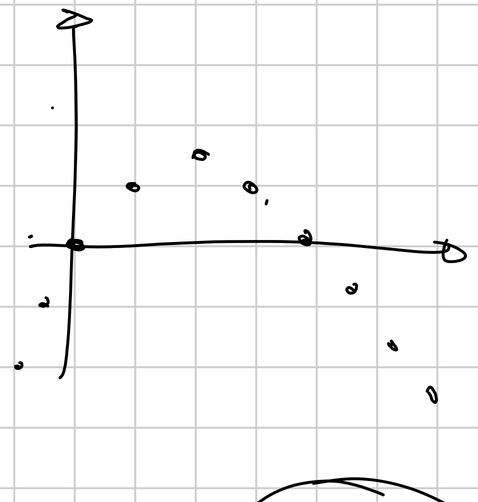
$F(\{0,1,2,3\}) \subseteq \{0,1,2\}$

$p(x) = x(4-x) =$

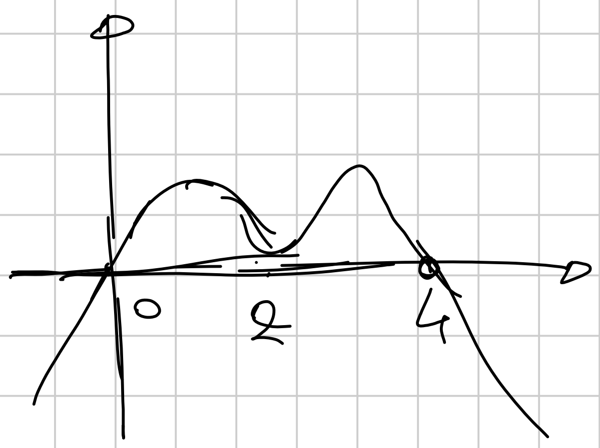
x	$p(x)$
-1	-5
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0
5	-5

$K=3$

$F(\{0,1,2,3,4\}) \not\subseteq \{0,1,2,3\}$



$p(x) = -x^4 + 8x^3 - 20x^2 + 16x$



$x(4-x)(x-2)^2$

$K=3$ non magico

Per $K=4$ o più, l'esponente sopra mi dice che $F(0)=F(k+1)=F(2)=F(3)= \dots = F(k-1)$

Rimangono fuori 1 e K

$$F(x)-F(0)=x(K+1-x)(2-x)(3-x)\dots(K-1-x)G(x)$$

Per $c=1$, se $F(1)\neq F(0)$ $G(1)\neq 0$ e quindi $|G(1)|\geq 1$

$K\geq |F(1)-F(0)|\geq |1\cdot(k+1)\cdot 1\cdot 2\cdot \dots \cdot K|$

falsa da 4 in poi

A5 (a) $f(g(x))=x^2$ $g(f(x))=x^3$ $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

(b) $f(g(x))=x^2$ $g(f(x))=x^4$

Saranno un sì e un no. x^3 è biiettiva, x^4 no

(a) g suriettiva
f iniettiva

$g\circ f\circ g$ $f\circ g\circ f$

$g\circ f\circ g\circ f$

$$[g(x)]^3=g(f(g(x)))=g(x^2)$$ coincidono solo $g(x)$

Esisterà a t.c. $g(a)=0$

$0=0^3$

$0=[g(a)]^3=g(a^2)$ $=g(a^4)=g(a^8)=g(a^{16})=\dots$

$\Rightarrow$ tanti valori k t.c. $g(k)=0$

$g(k)=0\Rightarrow f(g(k))=f(0)$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \shortparallel$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad k^2$

$\Rightarrow$ ci sono al più due valori k t.c. $g(k)=0$, cioè $\pm\sqrt{f(0)}$

$\Rightarrow$ L'unica possibilità per avere "pochi" valori diversi è $a \in \{-1,0,1\}$

Stesso discorso per b t.c. $g(b)=1$, c t.c. $g(c)=-1$

$$-1 = [g(c)]^3 = g(c^3)$$

$g(a)=0$ può essere vero solo per $a \in \{-1,0,1\}$

e se $g(-1)=0$ allora anche $g((-1)^2)=g(1)=0$

$g(b)=1$ " " " $b \in \{-1,0,1\}$

e se $g(-1)=1$ allora $g(1)=1$

$g(c)=-1$ " " " $c \in \{-1,0,1\}$

$g(-1)=-1 \Rightarrow g(1)=-1$

Ho 2 valori distinti, $g(0)$ e $g(1)$, con cui devo "prendere" sia -1, che 0, che 1 $\Rightarrow$ impossibile

[Alternativa: da $f(x^3)=[f(x)]^2 \Rightarrow f(\{-1,0,1\}) \subseteq \{0,1\}$

In $g(f(x))=x^3$ sostituisco $-1,0,1$]

2b Mi restringo a cercare $f,g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

e t.c. $f(g(x))=x^2$, $g(f(x))=x^4$

(poi estendo con $0 \to 0$, $f(-x)=f(x)$)

Problema più facile: esistono $\hat{f}(\hat{g}(x))=2x$

$\hat{g}(\hat{f}(x))=4x$?

Idea:

$\sqrt{4}=2$ $\quad$ $4\sqrt{x}=4\sqrt{x}$

$\sqrt{4x}$ $\quad 2\sqrt{x}$

$$\hat g(x)=4x^2$$
$$\hat f(x)=\sqrt{x}$$

$$\hat f(\hat g(x))=\sqrt{4x^2}=2x$$
$$\hat g(\hat f(x))=4(\sqrt{x})^2=4x$$

$$\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$$

$f\circ g=2x$

$$x=e^y \qquad y=\log x$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2=e^{2y} \qquad x^2=e^{\hat f(\hat g(y))}$$

$$\hat f(\hat g(y))=2y \qquad x^4=e^{\hat g(\hat f(y))}$$
$$\hat g(\hat f(y))=4y$$

$$x^2=e^{\hat f(\hat g(\log x))}=\exp\circ\hat f\circ\hat g\circ\log(x)$$
$$x^4=e^{\hat g(\hat f(\log x))}=\exp\circ\hat g\circ\hat f\circ\log(x)$$

$$x^2=\overbrace{\exp\circ\hat f\circ\log}^{f}\circ\overbrace{\exp\circ\hat g\circ\log}^{g}(x)$$
$$x^4=\underbrace{\exp\circ\hat g\circ\log}_{g}\circ\underbrace{\exp\circ\hat f\circ\log}_{f}(x)$$

$$f(x)=\exp\left(\sqrt{\log x}\right) \qquad g=\exp\left(4(\log x)^2\right).$$

[Alternative: dato reale a, considera $a_n=a^{2^n}$

Queste succ. partizionano i reali
Costruisco funzioni che "scambiano" successioni

H6 $\max(x,y,z,w) \leq \sqrt{5}\min(x,y,z,w)$

$$\sum_{cyc} \frac{xy}{5x^2-y^2} \geq 1$$

sostituzione: $a = \frac{x}{y}$ e cicliche

Così $\dfrac{\frac{xy}{y^2}}{\frac{5x^2-y^2}{y^2}} = \dfrac{a}{5a^2-1}$ dipende solo da a

Testo $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{a}{5a^2-1} \geq 1$ $\qquad abcd=1 \qquad \frac{1}{\sqrt{5}} \leq a \leq \sqrt{5}$

"Jensen-like"

I

Sostituzione $a = e^{\alpha}$ e cicliche

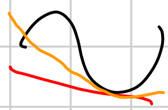
$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0 \qquad -\log\sqrt{5} \leq \alpha \leq \log\sqrt{5}$

Testo $\Updownarrow$

$$\sum_{cyc} \frac{e^{\alpha}}{5e^{2\alpha}-1} \geq 1$$

Questa è Jensen su $f(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha}}{5e^{2\alpha}-1}$

$$\sum_{cyc} f(\alpha) \geq 4f(0) = 4\,\frac{1}{5-1} = 1$$



$$\frac{a}{5a^2-1} \geq \frac{1}{(a+1)(a^2+1)} \qquad\qquad \frac{a}{5a^2-1} \geq \frac{1}{f(a)}$$

$$a(a+1)(a^2+1) \geq 5a^2-1 \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$1+a f(a) \geq 5a^2$$

$$\underbrace{1+a+a^2+a^3+a^4}_{\text{AM-GM a coppie}} \geq 5a^2$$

$$\sum_{cyc} f(a) \geq \sum_{cyc} \frac{1}{(a+1)(a^2+1)} \overset{\text{HOPE}}{\geq} 1$$

CHEBYSHEV

$$\sum_{cyc} \frac{1}{(a+1)(a^2+1)} \geq \frac{1}{4}\left(\sum \frac{1}{a+1}\right)\left(\sum \frac{1}{a^2+1}\right)$$

Lemma

$$\boxed{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}}$$

Se usassi convessità di $\frac{1}{e^x+1}$ riuscirei a dimostrarlo dove la funzione è convessa, cioè +- per $a,b \geq 1$

In realtà, è vera anche con solo il vincolo $\boxed{\sqrt{ab} \geq 1}$

$$(a+1)(\sqrt{ab}+1)+(b+1)(\sqrt{ab}+1) \geq 2(1+a)(1+b)$$

$$2\sqrt{ab}+(a+b)\sqrt{ab} \geq a+b+2ab$$

$$(a+b)(\sqrt{ab}-1)-2\sqrt{ab}(\sqrt{ab}-1) \geq 0$$

$$\underbrace{(a+b-2\sqrt{ab})}_{\text{AM-GM}}(\sqrt{ab}-1) \geq 0$$

OK dimostrato Lemma in rosso..

Lemma migliore:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}^{?}+1}$$

Supponi $a = \min(a,b,c)$, rimpiazza $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$

e $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}$

grazie al Lemma, e a questo punto rimane in una var. sola.