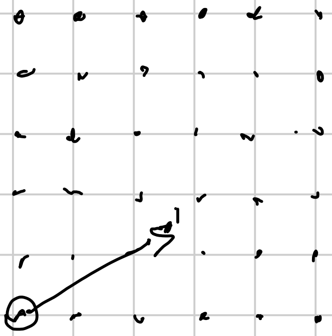
COMBINATORIA WC 2020

Note Title 24/01/2020

C4

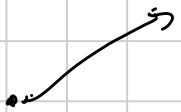


Punti con coord. $(0,0) \dots (n,0)$

$(0,n) \dots (n,n)$

$V(0,0) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

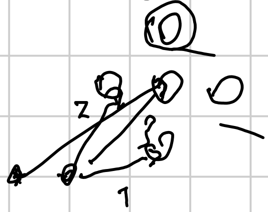
IDEA: Considero $|v(m,k)|^2$ e prendo il minimo.



Vettore con coord $\left(\frac{2a+1}{2}, \frac{2b+1}{2}\right)$.

WLOG coord > 0, $a \geq b$ $\quad \frac{2a+b}{2} \; \frac{3}{2}$

(1) $a > b$



3 vettori 1 e 2, 3 avranno norma minore di V.

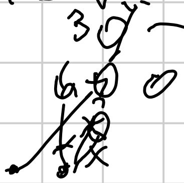
$\left(\frac{2a-1}{2}, \frac{2b+3}{2}\right)$ Calcoliamo la norma

$V_{iniz}^2 = V_x^2 + V_y^2 \qquad V_{fin}^2 = (V_x-1)^2 + (V_y+1)^2 = V_{iniz}^2 + 2V_y - 2V_x + 2$

$V_y + 1 \leq V_x \qquad V_{fin}^2 \leq V_{iniz}^2$ e $=$ c'è

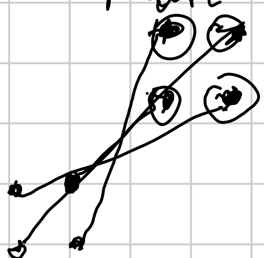
solo se $V_x - 1 = V_y$, $V_y + 1 = V_x$

(2) $V_x = V_y$

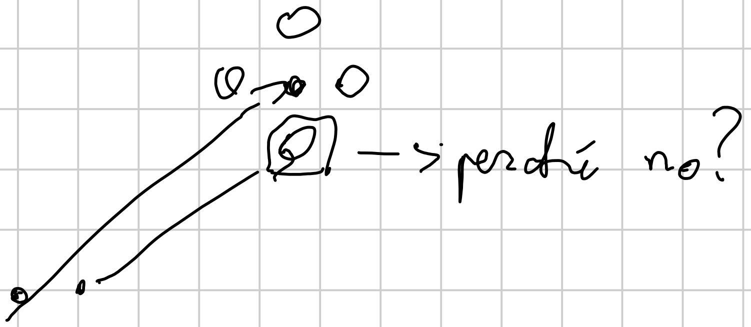


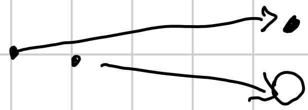
$(V_x-1)^2 + (V_y+1)^2 =$

Perché non può andare verso il punto 3?

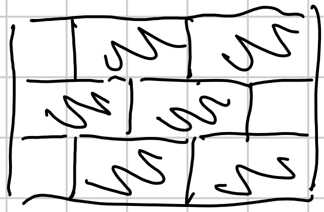


Oss: Se associamo $V_x \cdot V_y$ al vettore, non si deve fare il controllo finale





C5.



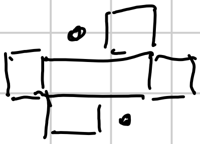
Domanda: Quante tessere circondano una casella vuota? Dipende.

Se è al centro, 4

Se è sui lati, 3

Se è in un angolo, 2

Quante caselle vuote circondano una tessera?

Se è al centro:  ≤ 4

Se è sui lati, ≤ 3

Se è in un angolo ≤ 2

Vogliamo contare le coppie tessera-casella vuota,

tessera-casella vuota: $\le 4T_C + 3T_L + 2T_A$

$= 4C_C + 3C_L + 2C_A$

① $4T_C + 3T_L + 2T_A \ge 4C_C + 3C_L + 2C_A$

Ho anche ② $T_L + T_A \ge C_L + C_A$ $\qquad T_A \ge 0 \quad C_A \le 4$

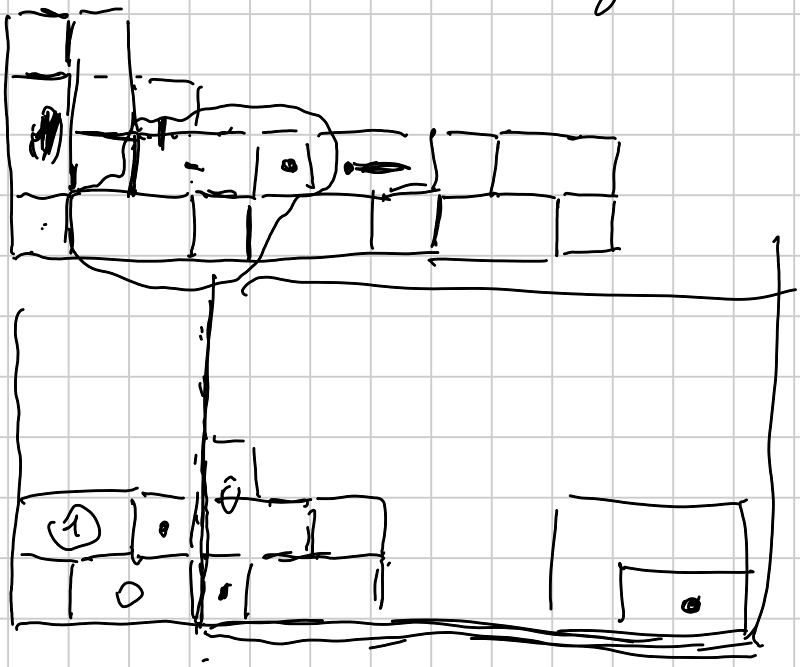
Sommiamo ① e ②: $4(T_C + \underbrace{T_L}_{=T} + T_A) - T_A \ge 4(C_C + \underbrace{C_L}_{=C} + C_A) - C_A$

$\leadsto 4T \ge 4C - 4 \Rightarrow T \ge C - 1$

Oss Voglio $T \ge C$

Mi basta dim. che una delle disug. usate è stretta

Proviamo



dividere in due pile uguali
una pila pari

fondere due pile

Obiettivo: produrre tutte pile da 1. (e quindi essere felici)

(a) Non si può per 81, 115, 119.

1ª mossa $\to$ 196, 119

$\boxed{115, 200}$ $\qquad$ 115, 100, 100 . . .

81, 234 $\qquad$ $115, \underbrace{25, \ldots, 25}_{8}$

Oss: Ah!, ma se tutte le pile sono multiple di a $k \geq 1$

$\to$ non si può. 1) C'entrano i divisori

2) Euclide??

(b) Perché n dispari è particolarmente felice?

$n = 2^k$ ok

n pari, ma $n \neq 2^k$

$n = 2^k \cdot d$

$n, 2 \to \overbrace{d\ d\ d \dots d}^{2^k}\ 2$

Se $\boxed{d\ 2 \to 1 \dots 1}$

se so

$\overbrace{d\ d\ d \dots d}^{N \leq 2^k - 1}\ \underbrace{\ \ }_{d+2}\ \overbrace{1 \dots 1}$

$d \dots d\ \ \frac{d}{2}\ 1 \dots 1$

itero $\to$ ok

E $d\ 2$?

$d\ 2 \quad d\ 11 \quad \frac{d+1}{2}\ \frac{d+1}{2}\ 1 \to \dots$

$d\ d \dots d\ 1 \quad d \dots d\ \frac{d+1}{2}\ \frac{d+1}{2} \dots$

$\dots d_1 \dots d_1\ p_1\ p_2 \dots p_k\ d_2\ d_2$

(1) $\to$ decido d_1 divide tutto

$d_1 \dots d_1\ d_2 \dots d_2$ $\boxed{A}$

(2) consumiamo tutti i d_1 o i d_2 (quelle che sono di meno)

WLOG d_1

$\to d_2 \dots d_2\ d_3 \dots d_3$ $\boxed{A}$

E se venisse num. d_1 = num. d_2? $\to d_3 \dots d_3$!

$\overbrace{1}^{2}\ \overbrace{1}^{1}\ 3\ 7 \qquad \overbrace{1}^{1}\ \overbrace{19\ 19}^{2} \qquad \overbrace{5\ 5\ 5\ 5}^{4}\ \overbrace{19}^{1} \qquad \overbrace{5\ 5\ 5}^{3}\ \overbrace{3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3}^{8}$

$\overbrace{1\,1\,1\ \cdots\ 1\,1}^{24}\ \overbrace{3\quad 3}^{5} \to \overbrace{1\,1\,\cdots\,1}^{39}$

2° Ah! Ma la somma del n. di d_1 e di d_2 qua è sempre dispari!

$\overbrace{1\,1}^{2}\,\overbrace{d}^{1}$ $\quad \overbrace{1}^{1}\ \overbrace{d_1}^{2^k}\quad \overbrace{d_1 \cdots d_1}^{2^k-1}\ \overbrace{d_2\ \ d_2}^{2^h}$

consumo i d_1 $\to$ $\overbrace{d_2 \cdots d_2}^{2^h-(2^k-1)}\quad \overbrace{d_3 \cdots d_3}^{2^\ell}$

consumo i d_2 $\to$ $\overbrace{d_1 \quad \cdots d_1}^{2^h-1-2^k}\quad \overbrace{d_3 \cdots d_3}^{2^\ell}$ $\Rightarrow$ uno pari l'altro dispari

$\Rightarrow$ mai uguali (ok)

1) Posso sempre fare mosse tranne che se ottengo tutte potenze di 2 $\to$ tutti 1

2) non posso arrivare a num. tutti uguali (prima di $\hat{1}$)

verifico $\overline{d_1}\ \overline{d_2}$ $\quad$ num. d_1 > num. d_2

può essere che $\dfrac{d_1+d_2}{2^\ell} = d_1$ o d_2? No, se no

$d_1 \mid d_2$ o $d_2 \mid d_1$ $\to$ anche all'inizio $(n,1,1)$
(e viceversa)

$\Rightarrow \text{mcd} = 1$.

3) Non ci sono cicli: num. di pile non diminuisce mai e i numeri si avvicinano alla media.

Quindi l'algoritmo dopo aver visitato alcune configurazioni terminerà con l'unica terminale: $1 \ldots 1$.

(c) Se ho pile pari e dispari, divido le pile pari $\to$ tutte dispari

Se sommando 2 pile dispari ottengo numeri con mcd globale > 1, sono triste.

Se no, sono felice.

Ora se ho pari + disp. $\to$ se mcd = 1 come in (b).

$d_1 \dots d_n$ $\qquad$ $d_1+d_2,\ d_3 \to$ to tte pile = mcd (d_1+d_2, d_3)

$$\overbrace{m_{123} \ \dots \ m_{123} \ d_4}\ d_5 \ \dots$$

$$\downarrow$$

$$m_{1234} \ \dots \ m_{1234} \ d_5 \ d_6 \ \dots$$

$$\vdots$$

$$\downarrow$$

$$m_{12\dots n} \qquad\qquad m_{123\dots n}$$

ma $m_{123\dots n} = 1$ $\square$