Winter Camp 2020

Stampato integrale delle sessioni

Autori vari

Indice

A

WC20 Pol

Note Title 22/01/2020

Trovare interi positivi K t.c.

A4 $\quad 0 \leq F(\{0,1,2,\dots K+1\}) \leq C \Rightarrow F(0)=F(1)=\dots=F(K+1)$

Due valori tra $F(0), F(1), \dots F(K+1)$ sono uguali

$$K+1-0 \mid \underbrace{F(K+1)-F(0)}_{\leq K \text{ in val. ass.}} \Rightarrow F(0)=F(K+1)$$

$$F(x) = F(0) + x(K+1-x)\,G(x) \qquad G(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

$C \in \{1,2,\dots K\}$

$$0 \neq F(C)-F(0) = C(K+1-C)\,\widetilde{G(C)}$$

$$|F(C)-F(0)| \geq C(K+1-C) \quad (\text{se } F(C) \neq F(0))$$

Per $C=2$: $\quad K \geq |F(2)-F(0)| \geq 2(K+1-2)$

$$K \geq 2K-2 \qquad K \leq 2$$

$\Rightarrow$ se K è 3 o più, $F(2)=F(0)=F(K+1)$

$$K \geq |F(C)-F(0)| \geq C(K+1-C)$$

$$C^2-C \geq (C-1)K \qquad K \leq \frac{C^2-1}{C-1} = C+1$$

$p(x) = x(2-x)$

x	$p(x)$
-1	-3
0	0
1	1
2	0
3	-3

$K=1$ non magico

$F(\{0,1,2\}) = \{0,1\}$

$p(x) = x(3-x)$

x	$p(x)$
-1	-4
0	0
1	2
2	2
3	0
4	-4

$K=2$ non magico

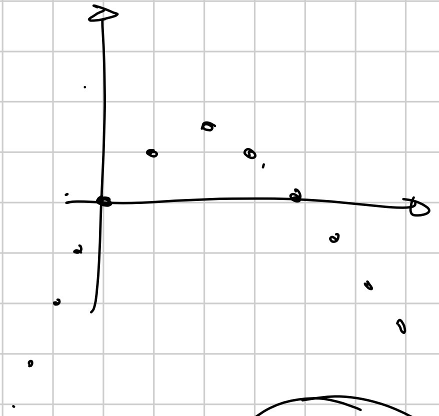
$F(\{0,1,2,3\}) \subseteq \{0,1,2\}$

$K=3$

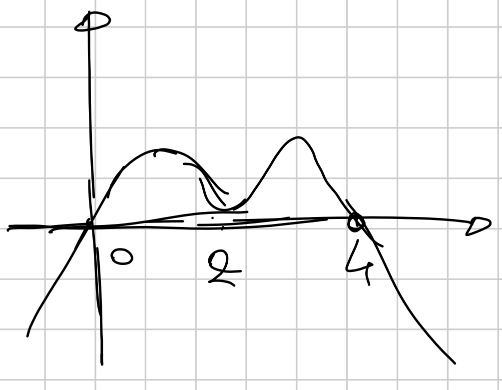
$p(x) = x(4-x) =$

x	$p(x)$
-1	-5
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0
5	-5

$F(\{0,1,2,3,4\}) \nsubseteq \{0,1,2,3\}$



$p(x) = -x^4+8x^3-20x^2+16x$



$K=3$ non magico

$x(4-x)(x-2)^2$

Per $K=4$ o più, l'esponente sopra mi dice che $F(0) = F(k+1) = F(2) = F(3) = \dots = F(k-1)$

Rimangono fuori 1 e K

$$F(x) - F(0) = x(k+1-x)(2-x)(3-x)\dots(k-1-x)\,G(x)$$

Per $c = 1$, se $F(1) \neq F(0)$ $G(1) \neq 0$ e quindi $|G(1)| \geq 1$

$$K \geq |F(1) - F(0)| \geq |1 \cdot (k+1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot K|$$

falsa da 4 in poi

A5 (a) $f(g(x)) = x^2$ $\quad g(f(x)) = x^3$ $\quad f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(b) $f(g(x)) = x^2$ $\quad g(f(x)) = x^4$

Saranno un sì e un no. x^3 è biiettiva, x^4 no

(a) g suriettiva
f iniettiva

$$g \circ f \circ g \qquad f \circ g \circ f$$

$$g \circ f \circ g \circ f$$

$$[g(x)]^3 = g(f(g(x))) = g(x^2)$$

coincidono solo $g(x)$

Esisterà a t.c. $g(a) = 0$

$0 = 0^3$

$$0 = [g(a)]^3 = g(a^2) \qquad = g(a^4) = g(a^8) = g(a^{16}) = \dots$$

$\Rightarrow$ tanti valori k t.c. $g(k) = 0$

$$g(k) = 0 \Rightarrow \underbrace{f(g(k))}_{= k^2} = f(0)$$

$\Rightarrow$ ci sono al più due valori k t.c. $g(k) = 0$, cioè $\pm\sqrt{f(0)}$

$\Rightarrow$ L'unica possibilità per avere "pochi" valori diversi è $a \in \{-1,0,1\}$

Stesso discorso per b t.c. $g(b)=1$, c t.c. $g(c)=-1$

$$-1 = [g(c)]^3 = g(c^3)$$

$g(a)=0$ può essere vero solo per $a \in \{-1,0,1\}$
e se $g(-1)=0$ allora anche $g((-1)^2)=g(1)=0$

$g(b)=1$ " " " $b \in \{-1,0,1\}$
e se $g(-1)=1$ allora $g(1)=1$

$g(c)=-1$ " " " $c \in \{-1,0,1\}$
$g(-1)=-1 \Rightarrow g(1)=-1$

Ho 2 valori distinti, $g(0)$ e $g(1)$, con cui devo "prendere" sia -1, che 0, che 1 $\Rightarrow$ impossibile

[Alternativa: da $f(x^3)=[f(x)]^2 \Rightarrow f(\{-1,0,1\}) \subseteq \{0,1\}$
In $g(f(x))=x^3$ sostituisco $-1,0,1$]

2b Mi restringo a cercare $f,g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
e t.c. $f(g(x))=x^2$, $g(f(x))=x^4$

(poi estendo con $0 \to 0$, $f(-x)=f(x)$)

Problema più facile: esistono $\hat{f}(\hat{g}(x))=2x$
$\hat{g}(\hat{f}(x))=4x$?

Idea:
$\sqrt{4}=2$ $4\sqrt{x}=4\sqrt{x}$

$\sqrt{4x}$ $\quad 2\sqrt{x}$

$\hat{g}(x) = 4x^2$

$\hat{f}(x) = \sqrt{x}$

$\hat{f}(\hat{g}(x)) = \sqrt{4x^2} = 2x$

$\hat{g}(\hat{f}(x)) = 4(\sqrt{x})^2 = 4x$

$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$f \circ g = 2x$

$x = e^y \qquad y = \log x$

$\Updownarrow$

$x^2 = e^{2y} \qquad x^2 = e^{\hat{f}(\hat{g}(y))}$

$\hat{f}(\hat{g}(y)) = 2y \qquad x^4 = e^{\hat{g}(\hat{f}(y))}$

$\hat{g}(\hat{f}(y)) = 4y$

$$x^2 = e^{\hat{f}(\hat{g}(\log x))} = \exp \circ \hat{f} \circ \hat{g} \circ \log (x)$$

$$x^4 = e^{\hat{g}(\hat{f}(\log x))} = \exp \circ \hat{g} \circ \hat{f} \circ \log (x)$$

$$x^2 = \overbrace{\exp \circ \hat{f} \circ \log}^{f} \circ \overbrace{\exp \circ \hat{g} \circ \log}^{g} (x)$$

$$x^4 = \underbrace{\exp \circ \hat{g} \circ \log}_{g} \circ \underbrace{\exp \circ \hat{f} \circ \log}_{f} (x)$$

$$f(x) = \exp\left(\sqrt{\log x}\right) \qquad g = \exp\left(4(\log x)^2\right).$$

[Alternative: dato reale a, considera $a_n = a^{2^n}$]

Queste succ. partizionano i reali
Costruisco funzioni che "scambiano" successioni

H6 $\max(x,y,z,w) \leq \sqrt{5}\min(x,y,z,w)$

$$\sum_{cyc} \frac{xy}{5x^2-y^2} \geq 1$$

sostituzione: $a = \frac{x}{y}$ e cicliche

Così $\dfrac{\frac{xy}{y^2}}{\frac{5x^2-y^2}{y^2}} = \dfrac{a}{5a^2-1}$ dipende solo da a

Testo $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{a}{5a^2-1} \geq 1$ $\quad abcd = 1 \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \leq a \leq \sqrt{5}$

"Jensen-like"

(I)

Sostituzione $a = e^{\alpha}$ e cicliche

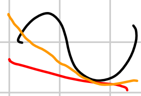
$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0 \quad -\log\sqrt{5} \leq \alpha \leq \log\sqrt{5}$

Testo $\Updownarrow$

$$\sum_{cyc} \frac{e^{\alpha}}{5e^{2\alpha}-1} \geq 1$$

Questa è Jensen su $f(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha}}{5e^{2\alpha}-1}$

$$\sum_{cyc} f(\alpha) \geq 4f(0) = 4\,\frac{1}{5-1} = 1$$



$$\frac{a}{5a^2-1} \geq \frac{1}{(a+1)(a^2+1)} \qquad \frac{a}{5a^2-1} \geq \frac{1}{f(a)}$$

$$\Updownarrow$$

$$a(a+1)(a^2+1) \geq 5a^2-1 \qquad 1+af(a) \geq 5a^2$$

$$\underbrace{1+a+\underbrace{a^2+a^3}+a^4}_{\text{AM-GM a coppie}} \geq 5a^3$$

$$\sum_{cyc} f(a) \geq \sum_{cyc} \frac{1}{(a+1)(a^2+1)} \left(\begin{array}{c}\text{HOPE} \\ \Downarrow \\ \geq 1\end{array}\right)$$

CHEBYSHEV

$$\sum_{cyc} \frac{1}{(a+1)(a^2+1)} \geq \frac{1}{4}\left(\underbrace{\sum \frac{1}{a+1}}\right)\left(\sum \frac{1}{a^2+1}\right)$$

Lemma

$$\boxed{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}}$$

Se usassi convessità di $\frac{1}{e^x+1}$ riuscirei a dimostrarlo dove la funzione è convessa, cioè $+$ per $a,b \geq 1$

In realtà, è vera anche con solo il vincolo $\boxed{\sqrt{ab} \geq 1}$

$$(a+1)(\sqrt{ab}+1)+(b+1)(\sqrt{ab}+1) \geq 2(1+a)(1+b)$$

$$2\sqrt{ab}+(a+b)\sqrt{ab} \geq a+b+2ab$$

$$(a+b)(\sqrt{ab}-1)-2\sqrt{ab}(\sqrt{ab}-1) \geq 0$$

$$(\underbrace{a+b-2\sqrt{ab}}_{\text{AM-GM}})(\underbrace{\sqrt{ab}-1}) \geq 0$$

OK dimostrato Lemma in rosso..

Lemma migliore:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{abc}+1}$$

Suppani $a = \min(a,b,c)$, rimpiazza $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$

e $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}$

grazie al Lemma, e

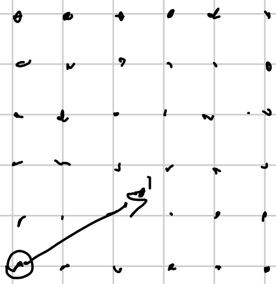
a questo punto rimane in

una var. sola.

COMBINATORIA WC 2020

Note Title 24/01/2020

C4.



PUNTI CON COORD. $(0,0) \dots (n,0)$

$(0,n) \dots (n,n)$

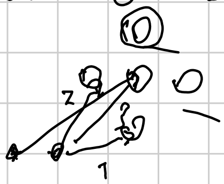
$V(0,0) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

IDEA: Considero $|v(m,k)|^2$ e prendo il minimo.

Vettore con coord $\left(\frac{2a+1}{2}, \frac{2b+1}{2}\right)$.

WLOG coord > 0, $a \geq b$ $\quad \frac{2a+b}{2} \frac{3}{2}$.

① $a > b$



3 vettori 1 e 2, 3 avranno norma minore di V.

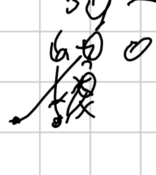
$\left(\frac{2a-1}{2}, \frac{2b+3}{2}\right)$ Calcoliamo la norma

$V_{iniz}^2 = V_x^2 + V_y^2 \qquad V_{fin}^2 = (V_x - 1)^2 + (V_y + 1)^2 = V_{iniz}^2 + 2V_y - 2V_x + 2$

$V_y + 1 \leq V_x \qquad V_{fin}^2 \leq V_{iniz}^2$ e $=$ c'è

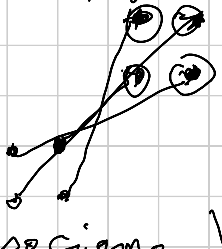
solo se $V_x - 1 = V_y \quad V_y + 1 = V_x$

② $V_x = V_y$

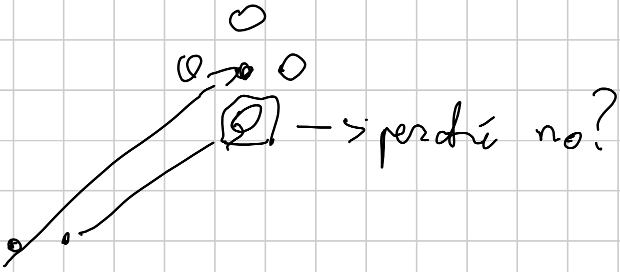


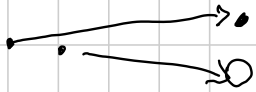
$(V_x - 1)^2 + (V_y + 1)^2 =$

Perché non può andare verso il punto 3?

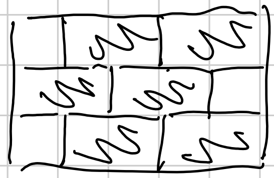


OSS: Se associamo $V_x \cdot V_y$ al vettore, non si deve fare il controllo finale





C5.



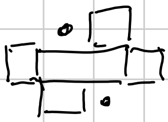
Domanda: Quante tessere circondano una casella vuota? Dipende.

Se è al centro, 4

Se è sui lati, 3

Se è in un angolo, 2

Quante caselle vuote circondano una tessera?

Se è al centro:  ≤ 4

Se è sui lati, ≤ 3

Se è in un angolo ≤ 2

Vogliamo contare le coppie tessera-casella vuota,

tessera-casella vuota: $\leq 4T_C + 3T_L + 2T_A$

$$= 4C_C + 3C_L + 2C_A$$

① $4T_C + 3T_L + 2T_A \ge 4C_C + 3C_L + 2C_A$

Ho anche ② $T_L + T_A \ge C_L + C_A$ $\quad T_A \ge 0 \quad C_A \le 4$

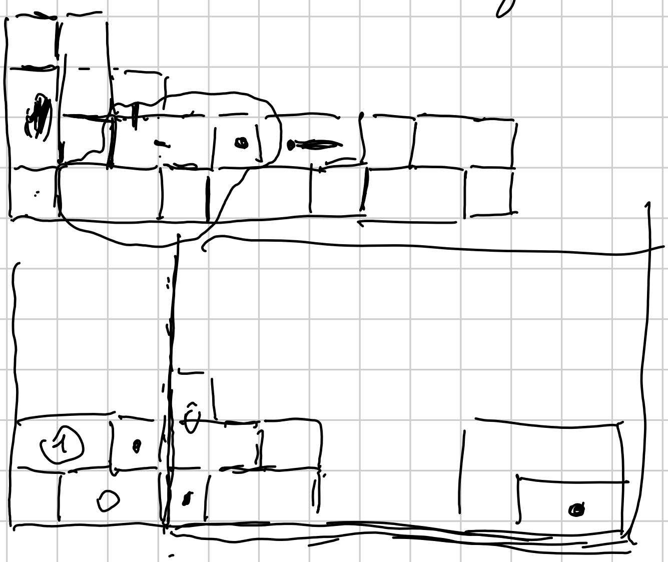
Sommiamo ① e ②: $4(\underbrace{T_C + T_L + T_A}_{= T}) - T_A \ge 4(\underbrace{C_C + C_L + C_A}_{= C}) - C_A$

$\rightsquigarrow 4T \ge 4C - 4 \Longrightarrow T \ge C - 1$

Oss Voglio $T \ge C$

Mi basta dim. che una delle disug. usate è stretta

Proviamo



dividere in due pile uguali una pila pari

fondere due pile

Obiettivo: produrre tutte pile da 1. (e quindi essere felici)

(a) Non si può per 81, 115, 119.

1ª mossa → 196, 119 ; $\boxed{115, 200}$; 81, 234 $\qquad$ 115, 100, 100 . . .

$115, \underbrace{25, \dots, 25}_{8}$

Oss: Ah!, ma se tutte le pile sono multiple di 1 $k \geq 1$

→ non si può.

1) C'entrano i divisori

2) Euclide??

(b) Perché n dispari è particolarmente felice?

$n = 2^k$ ok

n pari, ma $n \neq 2^k$

$n = 2^k \cdot d$

$n, 2 \to d\ d\ d \dots d\ 2$

2^k

$N \leq 2^k - 1$

$d + 2$

$d\ d\ d \dots d\ 1 \dots 1$

Se $\boxed{d\ 2 \to 1 \dots 1}$

se so

$d \dots d\ \frac{d}{2}\ 1 \dots 1$

itero → ok

E $d\ 2$?

$d\ 2 \quad d\ 11 \quad \frac{d+1}{2}\ \frac{d+1}{2}\ 1 \to \dots$

$d\ d \dots d\ 1 \quad d \dots d\ \frac{d+1}{2}\ \frac{d+1}{2} \dots$

$\dots d_1 \dots d_1\ p_1\ p_2 \dots p_k\ d_2\ d_2$

1 → devo dividere tutto

$d_1 \dots d_1\ d_2 \dots d_2$ $\boxed{A}$

2 consumiamo tutti i d_1 o i d_2 (quelle che sono di meno) WLOG d_1

$\to d_2 \dots d_2\ d_3 \dots d_3$ $\boxed{A}$

E se venisse num. d_1 = num. d_2? → $d_3 \dots d_3$!

$\overbrace{1\ 1}^{2}\ \overset{1}{37} \quad \overbrace{1}^{1}\ \overbrace{19\ 19}^{2} \quad \overbrace{5\ 5\ 5\ 5}^{4}\ \overset{1}{19} \quad \overbrace{5\ 5\ 5}^{3}\ \overbrace{3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3}^{8}$

$\underbrace{1\,1\,1 \dots 1\,1}_{24}\ \underbrace{3 \quad 3}_{5} \to \underbrace{7\,1 \dots 1}_{39}$

2° Ah! Ma la somma del n. di d_1 e di d_2 qua è sempre dispari!

$\underbrace{1\,1}_{2}\underbrace{d}_{1}$ $\quad \underbrace{1}_{1}\ \underbrace{d_1}_{2^k}$ $\quad \underbrace{d_1 \dots d_1}_{2^k-1}\ \underbrace{d_2 \quad d_2}_{2^h}$

consumo i $d_1 \to \underbrace{d_2 \dots d_2}_{2^h-(2^k-1)}\ \underbrace{d_3 \dots d_3}_{2^\ell}$

consumo i $d_2 \to \underbrace{d_1 \dots d_1}_{2^h-1-2^k}\ \underbrace{d_3 \dots d_3}_{2^\ell}$ $\Rightarrow$ uno pari l'altro dispari

$\Rightarrow$ mai uguali (ok)

1) Posso sempre fare mosse tranne che se ottengo tutte potenze di 2 $\to$ tutti 1

2) non posso arrivare a num. tutti uguali (prima di 1)

verifico $\overbrace{d_1}\ \overbrace{d_2}$ num. $d_1 >$ num. d_2

può essere che $\dfrac{d_1+d_2}{2^\ell} = d_1$ o d_2? No, se no

$d_1 \mid d_2$ o $d_2 \mid d_1$ $\to$ anche all'inizio $(n, 1, 1)$

(e viceversa) $\Rightarrow$ mcd $= 1$.

3) Non ci sono cicli: num. di pile non diminuisce mai e i numeri si avvicinano alla media.

Quindi l'algoritmo dopo aver visitato alcune configurazioni terminerà con l'unica terminale: $1 \dots 1$.

(c) Se ho pile pari e dispari, divido le pile pari $\to$ tutte dispari

Se sommando 2 pile dispari ottengo numeri con mcd globale > 1, sono triste.

Se no, sono felice.

Ora se ho pari + disp. $\to$ se mcol = 1 come in (b).

$d_1 \ldots d_n$ $\qquad d_1 + d_2, d_3 \to$ tutte pile = mcol (d_1+d_2, d_3)

$\overbrace{m_{123} \ldots m_{123}} \; d_4 \; d_5 \ldots$

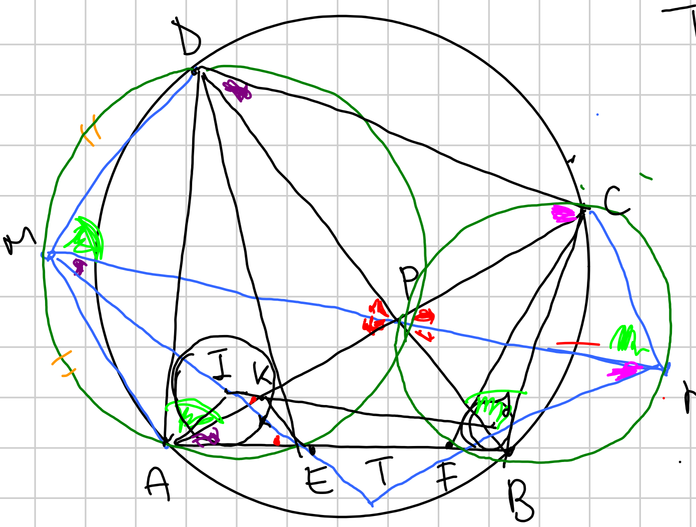
$m_{1234} \ldots m_{1234} \; d_5 \, d_6 \ldots$

$\vdots$

$m_{12\ldots n} \qquad m_{123\ldots n} \qquad$ ma $m_{123\ldots n} = 1$ $\square$

WC 2020 - GEOMETRIA SINTETICA

Note Title 23/01/2020



Th: AEKI ciclico

Th $\Leftrightarrow \widehat{IKA} = \widehat{IEA}$

$\widehat{IEA} = \dfrac{\widehat{DEA}}{2} = \dfrac{\widehat{DPA}}{2}$

Th $\Leftrightarrow MP \parallel IK$

M := bisettrice a $\widehat{DPA}$ con (DPEA)

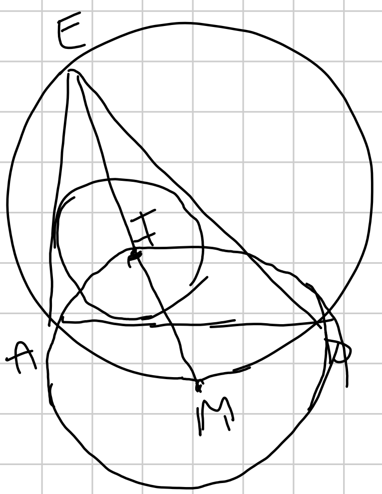
$\overset{\frown}{DM} = \overset{\frown}{MA}$ $\Rightarrow$ E, I, M sono allineati
N, J, F sono allineati

$T := NF \cap ME$

Guardo $\overset{\triangle}{TNM}$ $\quad MN \parallel IJ \Leftrightarrow \dfrac{TM}{TN} = \dfrac{IM}{JN}$

$\widehat{TMP} = \widehat{EAP} = \widehat{BDC}$

$\Rightarrow \overset{\triangle}{TMN} \sim \overset{\triangle}{PDC} \Rightarrow \dfrac{TM}{TN} = \dfrac{PD}{PC}$



$\widehat{IAD} = \frac{1}{2}\widehat{EAD} = \frac{1}{2}\widehat{IMD}$

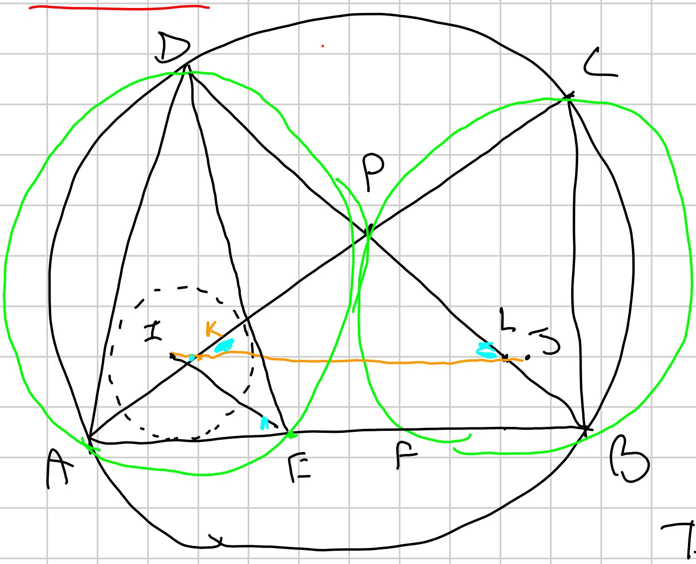
Resta da dimostrare che

$\dfrac{PD}{PC} = \dfrac{DM}{CN}$ dato che $IM = DM$
$JN = CN$

Basta dimostrare che

$\triangle D\hat{M}P \sim \triangle P\hat{C}N$ cioè $D\hat{P}M = C\hat{P}N =$
$D\hat{M}P = C\hat{N}P =$

Sol 2



Tesi: IKEA sia ciclico

$\angle IKA \overset{?}{=} \angle IEA$

$= \frac{1}{2} \angle AED = \frac{1}{2} \angle APD$

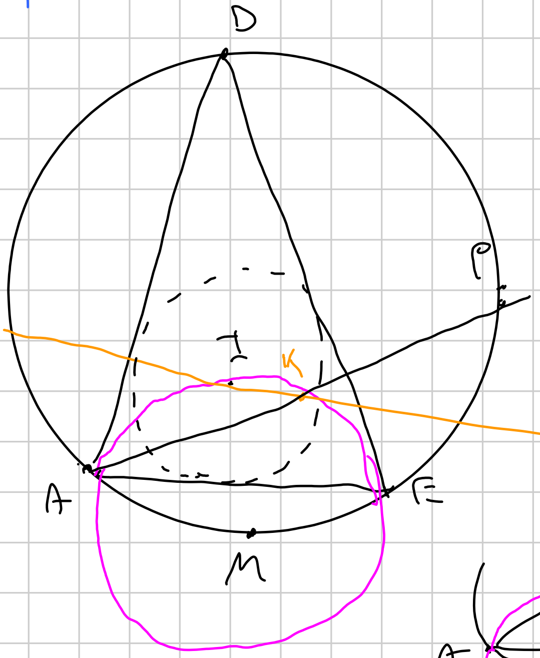
$= \frac{1}{2} \angle CFB \overset{?}{=} \angle JLB$

$\Downarrow$

Tesi vera $\Rightarrow$ PKL è isoscele

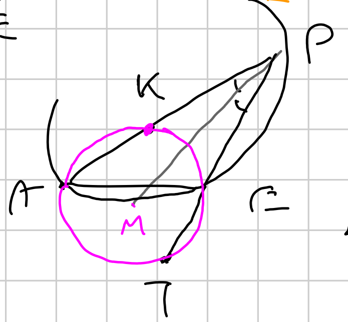
Angle chasing $\Rightarrow \angle PEF = \angle PFE \Rightarrow PE = PF$

Hope: EFKL ciclico di centro P



Hope: $PK = PE$

Fatto: $\bigcirc_{IAE}$ ha centro in M pt medio $\widehat{AE}$



PM è bisettrice

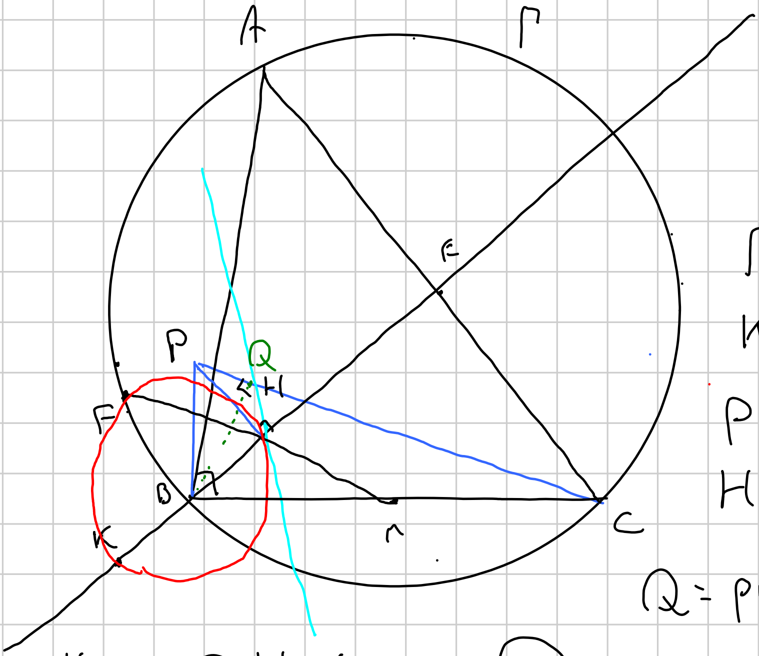
$PA \to PE$ riflessione in PM

$\bigcirc_{AIE} \to \bigcirc_{AIE}$

$\hookrightarrow PE = PK$

$PA = PT$

Problema 2



H è ortocentro di $\triangle ABC$

Γ circoscritta

$F \in \Gamma$: $\angle AFH = 90^\circ$

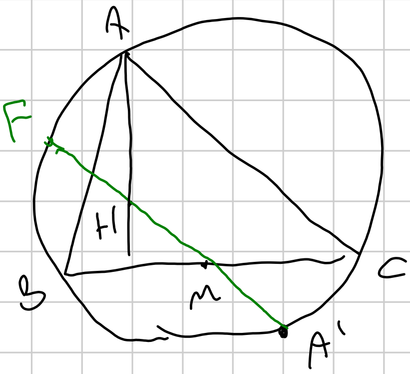
$K \in BH$: $KB = BH$

$PB \perp BC$, $HP \perp BH$ $\}$ P è l'n

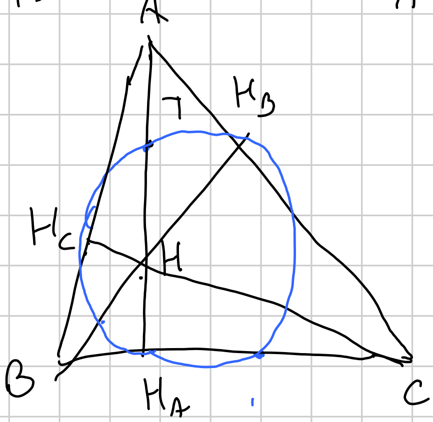
Q = piede da B su PC

Tesi: QH tange $\bigcirc_{FHK}$

Fatto da casa: H, M, A', F allineati



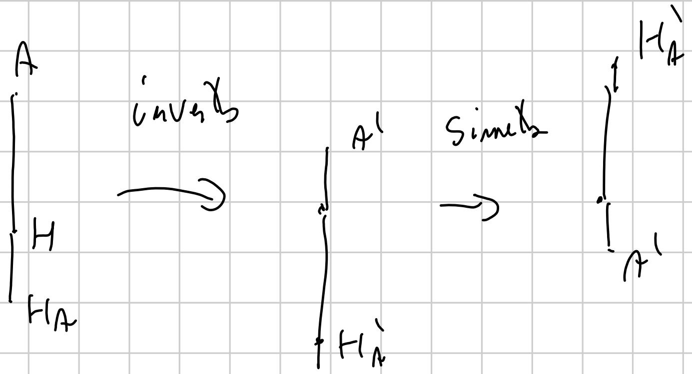
2° Fatto



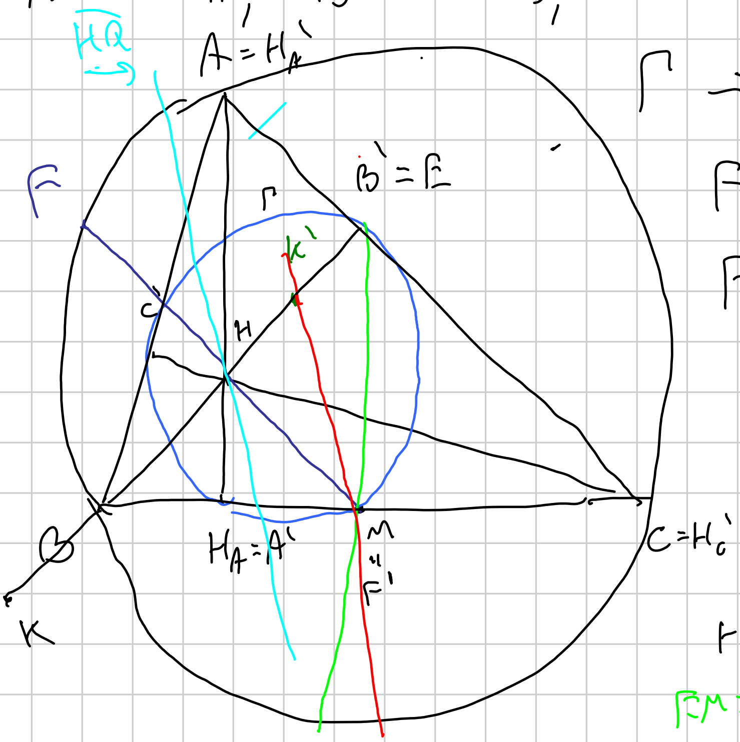
$AH \cdot HH_A = BH \cdot HH_B = CH \cdot HH_C$

$pow_H(\text{Feuerbach}) = HH_A \cdot HT = \frac{1}{2} HH_A \cdot AH$

Facciamo inversione in H di raggio $\sqrt{AH \cdot HH_A}$
+ simmetria centrale:



$A \leftrightarrow H_A$, $B \leftrightarrow H_B$, $C \leftrightarrow H_C$



$\Gamma \to$ Feuerbach

$F = MH \cap \Gamma$

$F' = M'H \cap \Gamma' = M$

$\searrow F' \to M$

$HK = 2\,HB$

$\downarrow$

$HK' = \frac{1}{2} HB' = \frac{1}{2} HE$

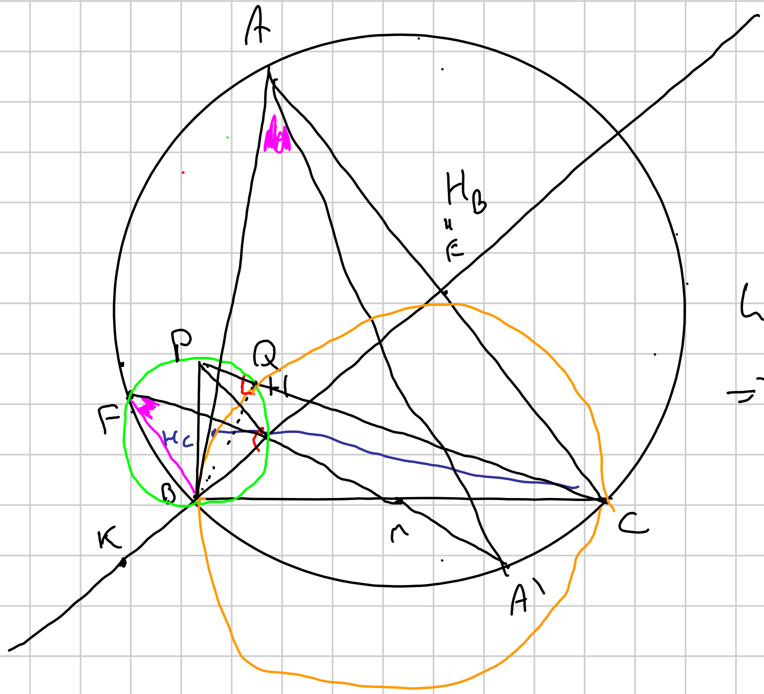
$FM = \gamma'$

$\bigcirc_{FHK} \to$ Retta per $F', M' = KM$

Tesi: HQ tange $\bigcirc_{FHK} \to HQ \parallel KM$

$BQ \perp QC \Rightarrow BQC, H_B H_C$ è ciclico

$BQCE$ di centro M. $\to \omega$



Chi è ω'?

$BCE\,H_C$

$\downarrow$

$H_B\,H_C\,B,C$

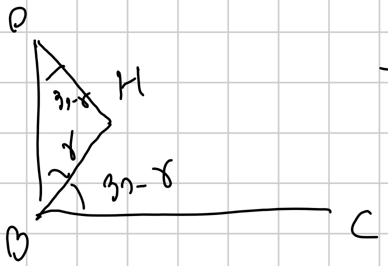
$\omega \to \omega'$

$\Rightarrow Q' \in \omega$

$\angle PQB = \angle PHB = 90^\circ$ F.M.: PQHBF ciclico

• PQHB ciclico ↑

$\angle BFH = \angle BFA' = \angle BAA' = 90 - \angle AA'B = 90 - \gamma$



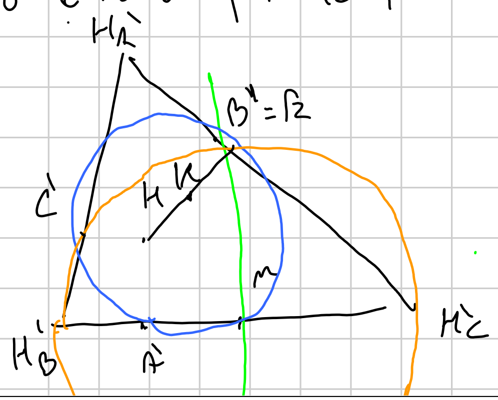
$\rightarrow \angle BPH = 90 - \gamma$

$\downarrow$

BFPH ciclico → la chiamo γ

$Q = \omega \cap \bigcirc_{BFPHQ}$

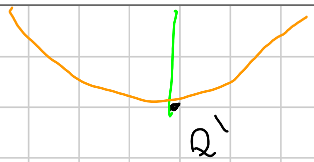
γ' è retta per $B'P' = EM$



$Q' = EM \cap \omega$

Q' è l'opposto di E in ω

$MQ = ME$



K no pt medio di HE

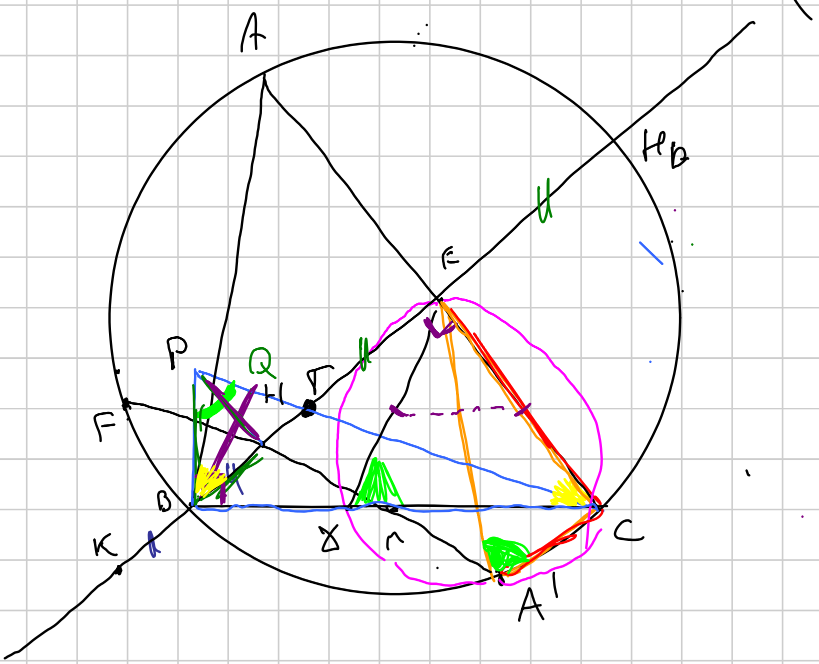
K pt medio EH

Q pt medio EQ

↳ Talete

Tesi $HQ' // KM$

Strada 2 (accenno)

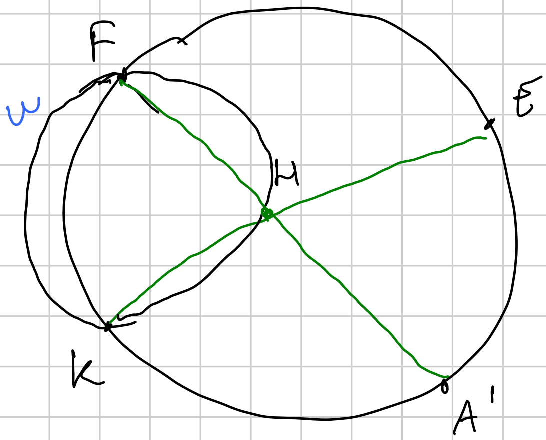


FATTO 1 $BA'CH$ è parallelogramma

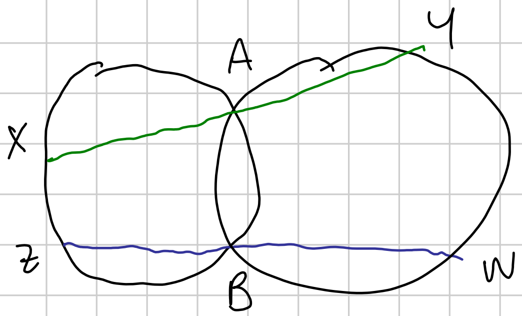
FATTO 2 $HB \cdot HH_b = HB \cdot 2HE = HK \cdot HE$

$$\underset{FH \cdot HA'}{\overset{HB \cdot HH_b}{\parallel}}$$

$\Rightarrow HK \cdot HE = FH \cdot HA' \Rightarrow FKA'E$ ciclico



Teorema (Reim)



Allora $XZ \parallel YW$

Usando Reim, la tesi è equivalente a

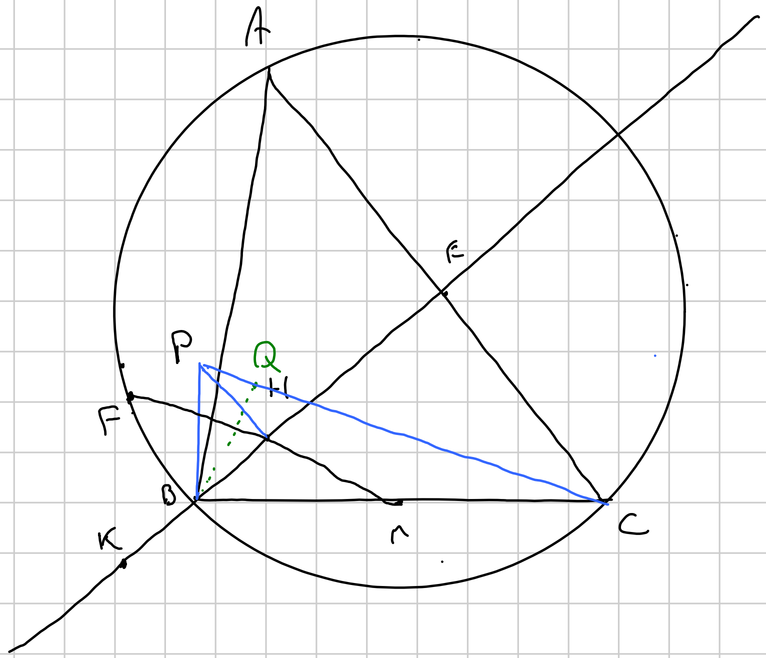
$$HQ \parallel EA'$$

Dimostriamolo.

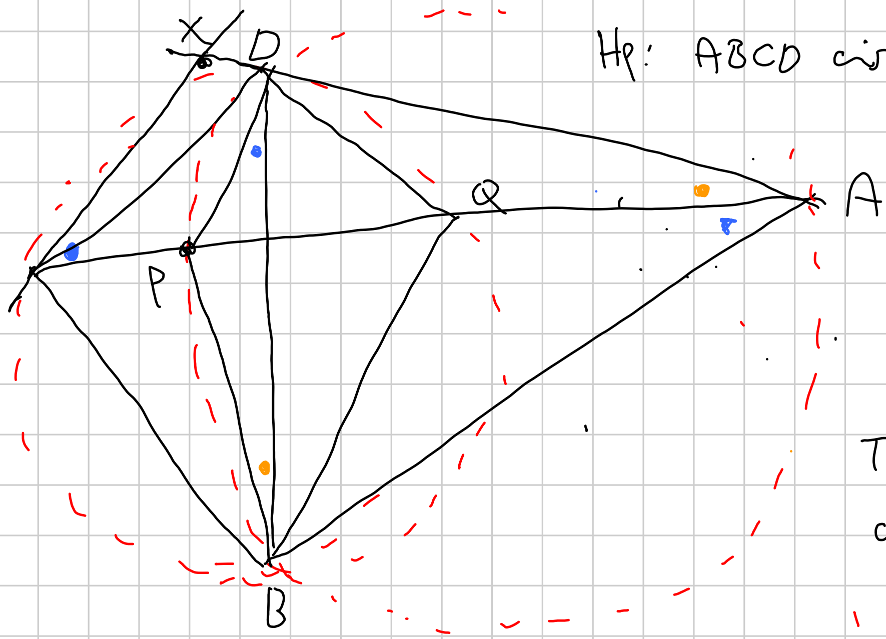
$$\frac{CA'}{CE} \underset{\text{Fatto 1}}{=} \frac{HB}{CE} \underset{\text{guardo }\Delta\text{ rettangoli}}{=} \frac{BP \cdot \cancel{\cos \angle HBP}}{BC \cdot \cancel{\cos \angle BCA}}$$

$\Rightarrow \quad \triangle BPC \sim \triangle CA'E$

Considerate $\triangle PBT$ e $\triangle CEX$ (considerate altezze da C, X in $\triangle CEX$)


A
E
P
Q
H
F
B
C
K
M

PROBLEMA 3



Hp: ABCD circoscritto

$\odot(BPDA)$, $\odot(CBQD)$

TS: BPDQ circoscritto.

ℓ = retta per C, $\ell \parallel AB$, $X = AD \cap \ell$

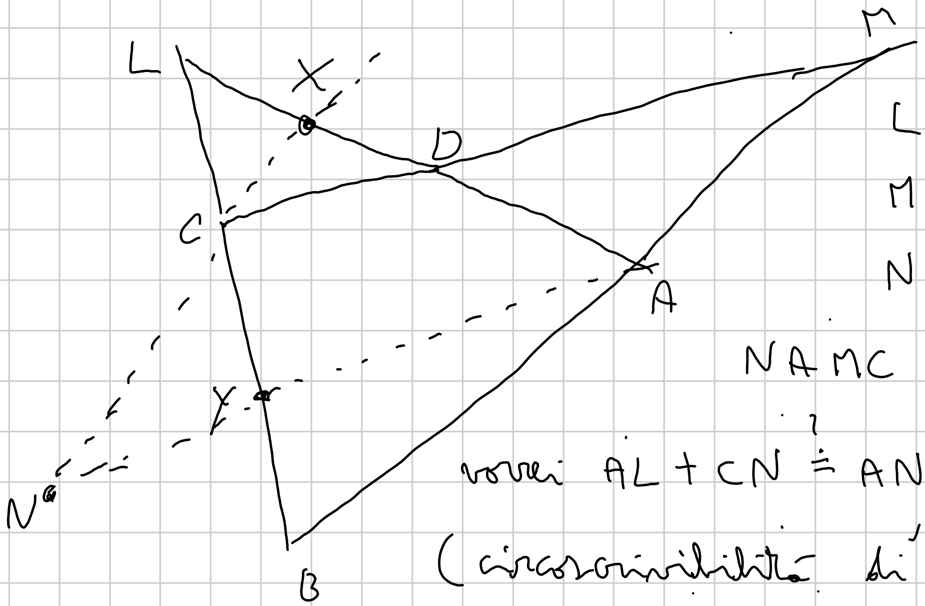
$\Rightarrow X\hat{C}A = C\hat{A}B$. ma $P\hat{B}D = C\hat{A}X$

$\Rightarrow \triangle CAX \simeq \triangle DBP$

Se ℓ' = retta per A, $\ell' \parallel CD$. $Y = \ell' \cap BC$

$\Rightarrow \triangle ACY \simeq \triangle BQD$

$\Rightarrow BPDQ \simeq AXCY$



$L = BC \cap AD$

$M = CD \cap AB$

$N = CX \cap AY$

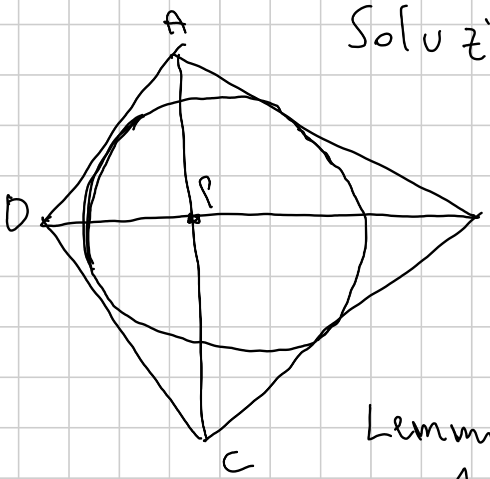
$NAMC$ parallelogrammo

vorrei $AL + CN \overset{?}{=} AN + CL$

(circoscrivibilità di $ANCL$)

Ma $AL+CN = AL + AM$ e $AN+CL = CM+CL$

e $ALCM$ è circoscritto $\Rightarrow AL+AM = CL+CM$



Soluzione 2: la tesi è equivalente al seguente fatto: se inverto ABCD di centro P, ottengo un altro quadrilatero circoscritto

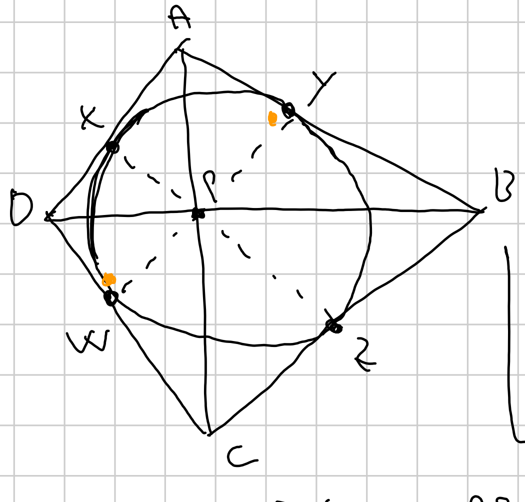
Lemma: ABCD è circoscritto

$$\Leftrightarrow \frac{1}{d(P,AB)} + \frac{1}{d(P,CD)} = \frac{1}{d(P,BC)} + \frac{1}{d(P,AD)}$$

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = r^2 \qquad A'B' = \frac{r^2\ AB}{PA \cdot PB}$$

$$h_{AB} \cdot AB = PB \cdot PA \cdot \sin\theta \Rightarrow \frac{1}{h_{AB}} = \frac{AB}{PA \cdot PB \cdot \sin\theta} = \frac{A'B'}{r^2 \sin\theta}$$

Quindi Lemma $\Rightarrow$ Tesi



$a = AX = AY$
$b = BY = BZ$
$c = CZ = CW$
$d = DW = DX$

Fatto (noto) X, P, Z
Y, P, W sono allineati

Ora $$AP/PC = \frac{AP}{a} \cdot \frac{c}{PC} \cdot \frac{a}{c} = \frac{\sin A\hat{Y}P}{\sin A\hat{P}Y} \cdot \frac{\sin W\hat{P}C}{\sin C\hat{W}P} \cdot \frac{a}{c}$$

$$= \frac{a}{c}$$

$$\Rightarrow [APB]/[BPC] = \frac{AP}{PC} = \frac{a}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{[APB]}{ab} = \frac{[BPC]}{bc} = \frac{[CPD]}{cd} = \frac{[DPA]}{ad} = \lambda$$

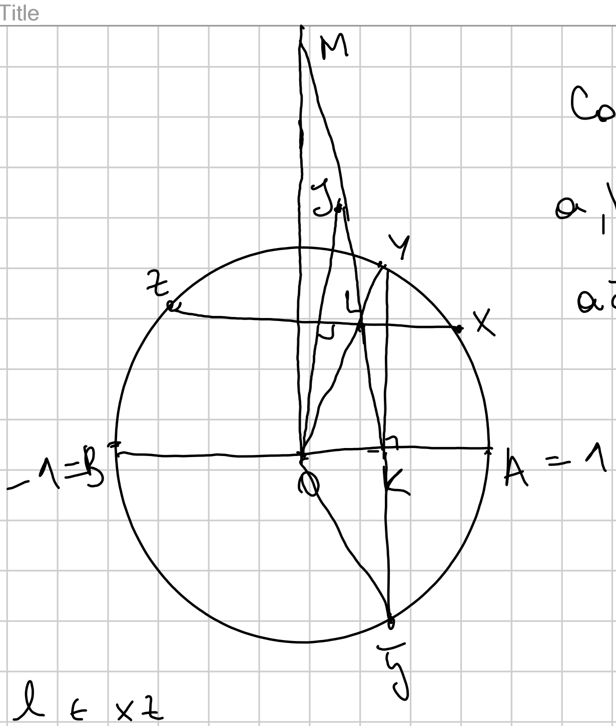
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h_{AB}} = \frac{AB}{2[APB]} = \frac{a+b}{2\lambda ab} = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h_{AB}} + \frac{1}{h_{CD}} = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = \frac{1}{h_{BC}} + \frac{1}{h_{DA}}$$

$\square$

WC 2020 GEOMETRIA CONTOSA

Note Title 24/01/2020



Complessi!

$a, b, x, y, z \in$ circ. unitaria

$a\bar{a} = b\bar{b} = x\bar{x} = y\bar{y} = z\bar{z} = 1$

J simmetrico di O rispetto a XZ

$$\Rightarrow \frac{J+O}{2} = \frac{x+z}{2}$$

$$\Rightarrow J = x+z$$

$l \in xz$
$\in yo$

$$\begin{cases} \dfrac{x-l}{z-l} = \dfrac{\bar{x}-\bar{l}}{\bar{z}-\bar{l}} & ① \text{ condizione di allineamento} \\[2mm] \dfrac{y-l}{0-l} = \dfrac{\bar{y}-\bar{l}}{\bar{0}-\bar{l}} & ② \end{cases}$$

② $-\bar{l}(y-l) = -l(\bar{y}-\bar{l}) = -l\left(\frac{1}{y}-\bar{l}\right)$

$+\cancel{\bar{l}l} - \bar{l}y = -\frac{l}{y} + \cancel{l\bar{l}} \quad = \bar{l} = l/y^2$

① $(x-l)\left(\frac{1}{z}-\frac{l}{y^2}\right) = \left(\frac{1}{x}-\frac{l}{y^2}\right)(z-l)$

$$\frac{x}{z} - \frac{x}{y^2}l - \frac{l}{z} + \cancel{\frac{l^2}{y^2}} = \frac{z}{x} - \frac{l}{x} + \frac{lz}{y^2} + \cancel{\frac{l^2}{y^2}}$$

- xzy^2 $\quad (x+z)\cancel{(x-z)}y^2 = l(xy^2 + x^2z - zy^2 - z^2x)$

$(y^2+xz)\cancel{(x-z)}$

$$l = \frac{(x+z)y^2}{y^2+xz}$$

$S = x+z$

$P = xz$

$$\ell = \frac{sy^2}{y^2+p}$$

$$k = \frac{y+\bar{y}}{2} = \frac{y+\frac{1}{y}}{2} = \frac{y^2+1}{2y}$$

$$\begin{cases} \bar{m} = -m \\ k, \ell, m \text{ allineati} \end{cases}$$ ②

$$\frac{m-\ell}{m-k} = \frac{\bar{m}-\bar{\ell}}{\bar{m}-\bar{k}} = \frac{+m+\bar{\ell}}{+m+\bar{k}}$$

$$(m-\ell)(m+\bar{k}) = (m+\bar{\ell})(m-k)$$

$$\cancel{m^2} + \bar{k}m - \ell m - \ell\bar{k} = \cancel{m^2} - km + \bar{\ell}m - k\bar{\ell}$$

$$k = \bar{k} \qquad m(\bar{\ell}+\ell-2k) = k(\bar{\ell}-\ell)$$

$$\boxed{m = \frac{k(\bar{\ell}-\ell)}{\bar{\ell}+\ell-2k}}$$

$$\ell = \frac{sy^2}{y^2+p} \qquad \bar{s} = \overline{x+z} = \bar{x}+\bar{z} = \frac{1}{x}+\frac{1}{z} = \frac{z+x}{xz} = \frac{s}{p}$$

$$\bar{p} = \overline{xz} = \frac{1}{zx} = \frac{1}{p}$$

$$\bar{\ell} = \frac{\bar{s}\,\overline{y^2}}{\overline{y^2}+\bar{p}} = \frac{\frac{s}{p}\cdot\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{p}} = \frac{s}{y^2+p}$$

$$\bar{\ell}-\ell = \frac{s}{y^2+p}(1-y^2) \qquad \bar{\ell}+\ell = \frac{s}{y^2+p}(1+y^2)$$

$$m = \underbrace{\frac{\cancel{y^2+1}}{2y}}_{k} \cdot \underbrace{\frac{s}{y^2+p}(1-y^2)}_{\bar{\ell}-\ell} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{s}{y^2+p}\cancel{(1+y^2)}}_{} - \underbrace{\frac{\cancel{y^2+1}}{y}}_{2k}}$$

$$= \frac{s(1-y^2)}{2y\cancel{(y^2+p)}} \cdot \frac{y\cancel{(y^2+p)}}{sy-y^2-p} = \boxed{\frac{s}{2}\,\frac{(1-y^2)}{sy-y^2-p}}$$

$\ell + \ell$

Th: $XKOZ$ ciclico $\Rightarrow$ $YOMI$ ciclico

ABCD ciclico in complessi:

$$\boxed{\frac{a-b}{c-b}\cdot\frac{c-d}{a-d}} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x-k}{0-k}\cdot\frac{0-z}{x-z} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x-k}{\cancel{k}}\cdot\frac{z}{x-z} = \frac{\bar{x}-\bar{k}}{\cancel{\bar{k}}}\cdot\frac{\bar{z}}{\bar{x}-\bar{z}}$$

$$z(x-k)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{x}-k\right)\frac{1}{z}(x-z) \qquad \cdot xz$$

$$-z(x-k)\cancel{(z-x)} = (1-xk)\cancel{(x-z)}$$

$$-zx+zk = 1-xk$$

$$(x+z)k = 1+xz \qquad sk = 1+p \qquad k = \frac{y^2+1}{2y}$$

$$s(y^2+1) = 2y(1+p)$$

$$\boxed{sy^2 - 2(1+p)y + s = 0} \quad =: q(y)$$

$YOMI$ ciclico

$$\frac{y-0}{m-0}\cdot\frac{m-i}{y-i} \in \mathbb{R} \iff \frac{y}{\cancel{m}}\,\frac{(m-i)}{y-i} = \frac{\frac{1}{y}}{\cancel{\frac{1}{m}}}\,\frac{\left(\frac{1}{m}+\bar{i}\right)}{\frac{1}{y}-\bar{i}}$$

$$\left(\frac{1}{y}-\overline{\lambda}\right) y\,(m-\lambda) = \frac{1}{y}(m+\overline{\lambda})(y-\lambda) \qquad \lambda = x+z$$

$$\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right) y(m-x-z) = \frac{1}{y}\left(m+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)(y-x-z)$$

$$y(xz-yx-yz)(m-x-z) = (y-x-z)(mxz+x+z)$$

$$y(p-ys)(m-s) = (y-s)(mp+s)$$

$$m = \frac{1}{2}\,\frac{s(1-y^2)}{sy-p-y^2}$$

$$m-s = \boxed{\frac{1}{2}\,\frac{s}{sy-p-y^2}}\left(1-\cancel{y^2}+2sy+2p+\cancel{2}y^2\right)$$

$$mp+s = \boxed{\frac{1}{2}\,\frac{s}{sy-p-y^2}}\left(p-py^2+2sy-2p-2y^2\right)$$

$$\cancel{y}(p-ys)\left(1+2sy+2p+y^2\right) = (y-s)\left(p-py^2+2sy-2p-2y^2\right)$$

$$LHS - RHS = p(y)$$

Hope: $p(y)$ multiplo di $q(y)$

$$p(y): \quad (-s)y^4 + (2s^2+2p+2)y^3 + (-5sp-5s)y^2 + (2p^2+2s^2+2p)y - ps$$

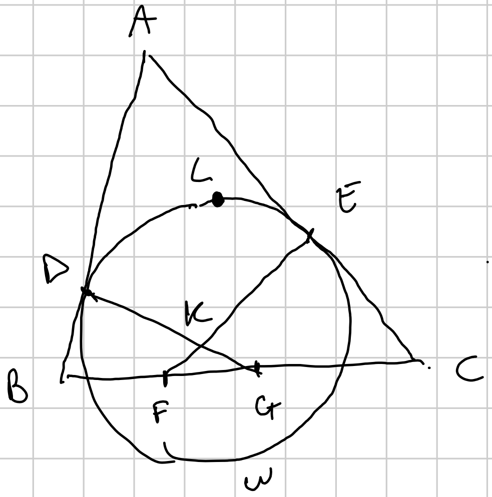
$$q(y): \quad sy^2 + (-2(1+p))y + s$$

$$\frac{p(y)}{q(y)} = \left(-y^2 + ky - p\right)$$

$$(-y^2+ky-p)(sy^2-2(1+p)y+s) =$$

$$= -sy^4 + sky^3 - psy^2 + 2(1+p)y^3 - 2k(1-p)y^2 + 2p(1+p)y - sy^2 + sky - ps \qquad k = 2s$$

$\square$



$BD = BF$
$CE = CG$

Chiamiamo $t = AD$

Baricentriche su ΔABC

- D, E, F, G facili, anche K
- L? Idea: omotetia che manda A-excerchio in ω

L è l'immagine del punto di tangenza dell' A-excerchio con BC, A_1

$A_1 = [0, s-b, s-c]$ $\quad s = \frac{a+b+c}{2}$

$D = [c-t, t, 0]$ $\quad E = [b-t, 0, t]$

$F = [0, a-(c-t), c-t]$

$G = [0, b-t, a-(b-t)]$

$EF: (a-b+t)tx - (a-b+t)(c-t)y + (b-t)(c-t)z = 0$

$DG: (a-c+t)tx + (b-t)(c-t)y - (a-c+t)(b-t)z = 0$

Fatto

$$\begin{cases} lx + my + nz = 0 \\ ux + vy + wz = 0 \end{cases}$$ ha soluzione

$[\det X, -\det Y, \det Z]$ dove

$$X = \begin{pmatrix} m & n \\ v & w \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} l & n \\ u & w \end{pmatrix}$$

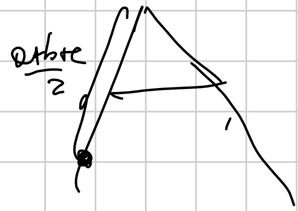
$$Z = \begin{pmatrix} l & m \\ u & v \end{pmatrix}.$$

Usando questo,

$$K = \Big[(a^2 + 2at - ab - ac)\overset{\alpha}{(b-t)}(c-t),\ t(b-t)(a+\overset{\beta}{c}-b)(a-c+t),$$
$$t(c-t)\underset{\gamma}{(a-c+b)}(a-b+t) \Big]$$

Ci resta da calcolare L.

Omotetie centro A, fattore t/s



$$\vec{L} = \frac{t}{s}\left(\vec{A_1} - \vec{A} \right) + \vec{A}$$

Attenzione Le coordinate di A_1 e A devono avere forma 1

$$A_1 = \left[0, \frac{s-b}{a}, \frac{s-c}{a} \right] \qquad l = [l_1, l_2, l_3]$$

Usando ⊛,

$$l_1 = \frac{t}{s}(0-1)+1$$

$$l_2 = \frac{t}{s}\left(\frac{s-b}{a}-0\right)+0$$

$$l_3 = \frac{t}{s}\left(\frac{s-c}{a}-0\right)+0$$

$$\Rightarrow \boxed{L = [\underbrace{a(s-t),\ t(s-b)}_{M},\ t(s-c)]}$$

$$\det \begin{array}{c} \quad a \qquad\qquad b \qquad\qquad c \\ \begin{pmatrix} a(s-t) & t(s-b) & t(s-c) \end{pmatrix} \\ \quad \alpha \qquad\qquad \beta \qquad\qquad \gamma \end{array} \begin{array}{l} \to 1 \text{ (grado } t) \\ \to 3 \text{ (grado } t), \end{array}$$

In realtà coeff di t^4 è 0, quindi il determinante è un polinomio di deg 3 in t.

Butto dentro 4 valori di t e se in tutti i casi ottengo 0, allora ho vinto.
Quali possono essere? $t=0$, $t=b$, $t=c$, $t=s-a$

Se $t=0$, $t=b$, $t=c$ conti ok

Nell' altro caso

2ª riga $M = 2(1-a)(1-b)(1-c)$ (2ª riga M')

$$\det(M) = 2(1-a)(1-b)(1-c)\det(M')$$

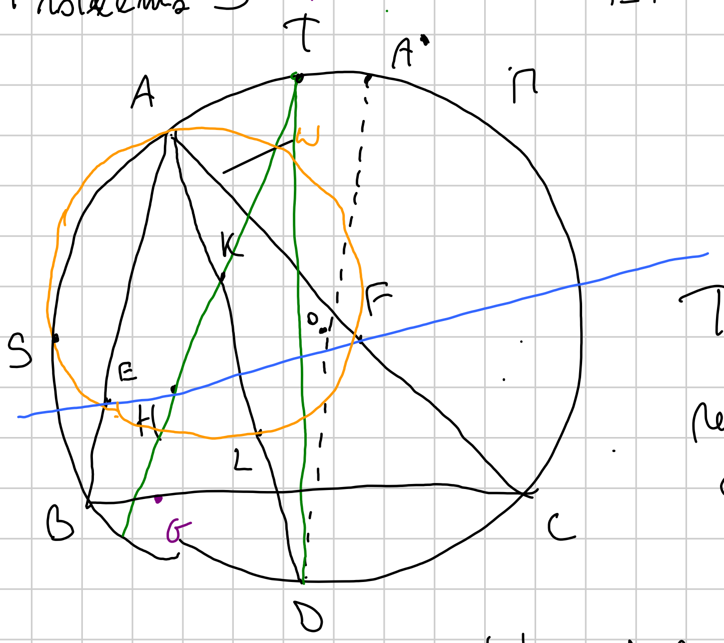
quindi i conti si semplificano.

Problema 3

EF retta a caso per H

K è centro di ω

D: $AK \cap \Gamma$



Tesi: HK, Γ e retta per D $\perp BC$ concorrono

$S = \omega \cap \Gamma$, $\exists$ rotomotetia in S: $E \to F$, $B \to C$, $\omega \to \Gamma$

$L = AK \cap \omega$, rotomotetia: $EL \to BD$ ha centro in S: è la stessa

Anche $L \to D$

$A = LK \cap \omega \to DO \cap \Gamma = A'$

S manda $H \to G$, $H \in EF \Rightarrow G \in BC$

S: $A \to A'$, $K \to O$, $H \to G$ $\qquad \Delta AKH \simeq \Delta A'OG$

$T \in \Gamma$: $DT \perp BC$ (Tesi: T, H, K allineati)

$K' = AD \cap HT$

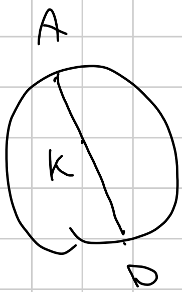
Rotomotetia in S: $AK'H \simeq A'OG'$

Ora se dimostro che $G' = G \Rightarrow$ Hp $A'OG \simeq AKH$

$\Rightarrow K = K' \Rightarrow T, H, K$ allineati.

So che $K' \in$ retta AD, ci basta che $\boxed{G' \in BC}$ NUOVA Tesi

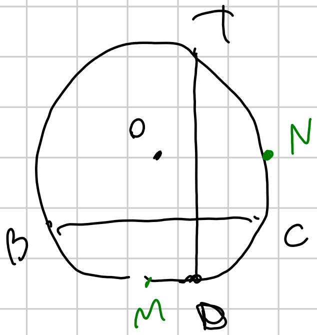
Γ = circonferenza unitaria, a, b, c, d



$$K \in AD \iff \frac{k-a}{d-a} = \frac{\bar{k}-\bar{a}}{\bar{d}-\bar{a}} = \frac{\bar{k}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{d}-\frac{1}{a}}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{k = a + d - ad\bar{k}} \quad (1)$$

$A' \to -d$ Com'è T?



N, M pt medi di BC, TD

$\Rightarrow b \cdot c = m^2$, $td = n^2$

$(e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} \to e^{i(\alpha+\beta)})$

$BC \perp TD \iff OM \perp ON$ $m = in$

$td = -bc$ $\boxed{t = -\frac{bc}{d}}$ $\bar{t} = -\frac{d}{bc}$

$H \to a+b+c$ (perché baricentro è $\frac{a+b+c}{3}$)

$\bar{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$

$K = AD \cap HT.$

$$\frac{K-T}{H-T} = \frac{\bar{K}-\bar{T}}{\bar{H}-\bar{T}} \quad : \quad \frac{K + \frac{bc}{d}}{a+b+c+\frac{bc}{d}} = \frac{\bar{K} + \frac{d}{bc}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{d}{bc}}$$

$$K \in AD \to \bar{K} = \frac{1}{a} + \frac{1}{d} - \frac{K}{ad}$$

Posso scegliere le coordinate in modo che $d = 1$

$$\frac{K+bc}{a+b+c+bc} = \frac{\frac{1}{a}+1-\frac{K}{a}+\frac{1}{bc}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{bc}} = \frac{bc+abc-Kbc+a}{ab+bc+ac+a}$$

$$K\Big(\overbrace{\boxed{abc+ac+ab+a}}^{a(b+1)(c+1)} + \overbrace{\boxed{bc+b^2c+bc^2+b^2c^2}}^{bc(b+1)(c+1)}\Big) =$$

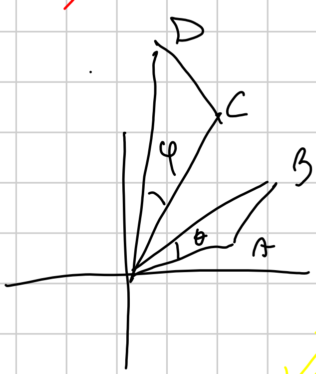
$$= (a^2bc + ab^2c^2 + \underbrace{b^2c + bc^2}_{bc(a+b+c)} + \underbrace{a^2 + ab + ac + abc}_{a(a+b+c)})$$

$$abc(a+bc) \qquad (a+bc)(a+b+c)$$

$$K(b+1)(c+1)(\cancel{a}+bc) = (\cancel{a}+bc)(a+b+c+abc)$$

$$K = \frac{abc+a+b+c}{(b+1)(c+1)}$$

$$AKH \sim A'OG$$



$$\frac{b}{a} = \frac{|OB|}{|OA|} \cdot e^{i\theta}$$

$$\frac{d}{c} = \frac{|OD|}{|OC|} \cdot e^{i\varphi}$$

$$\Delta OAB \sim \Delta OCD$$

$$\frac{K-a}{h-a} = \frac{0-a'}{g-a'} = \frac{1}{g+1}$$

$$A' = (-d) = -1 \qquad g+1 = \frac{b+c}{K-a}$$

$$K - a = \frac{\cancel{abc} + \cancel{a} + b + c - ab - ac - \cancel{abc} - \cancel{a}}{(b+1)(c+1)} = \frac{b+c-ab-ac}{(b+1)(c+1)}$$

$$= \frac{(b+c)(1-a)}{(b+1)(c+1)}$$

$$z = \frac{(b+1)(c+1)}{1-a} - 1 \qquad \bar{z} = \frac{(\bar{b}+1)(\bar{c}+1)}{1-\bar{a}} - 1$$

$$= \frac{(b+1)(c+1)\,a}{bc(a-1)} - 1$$

$G \in BC$:

$$-\frac{a}{a-1} = -\left(1 + \frac{1}{a-1}\right)$$

$$= -1 + \frac{1}{1-a}$$

$$\iff z = b + c - bc\,\bar{z} =$$

$$\cancel{\frac{(b+1)(c+1)}{1-a}} - 1 = b + c - \frac{(b+1)(c+1)\,a}{a-1} + bc$$

$$= b + c - \frac{(b+1)(c+1)}{1} + \cancel{\frac{(b+1)(c+1)}{1-a}} + bc$$

$$-1 = b + c + bc - (b+1)(c+1)$$ $\rightsquigarrow$ che è vero :)

TEORIA DEI NUMERI

Note Title 22/01/2020

① $f(n!) = f(n)!$

$m - n \mid f(m) - f(n)$

Soluzioni: $f(n) = 1 \quad \forall n$

$f(n) = 2 \quad \forall n$

$f(n) = n \quad \forall n$

$\underbrace{f(1!)}_{= f(1)} = f(1)! \qquad f(2) = f(2)!$

$\Rightarrow f(1), f(2) \in \{1, 2\}$

$6 - 1 \mid f(6) - f(1)^{=1}$

$6 - 2 \mid f(6) - f(2)^{=2}$

$6 - 3 \mid f(6) - f(3)^{=3}$

$6 - 4 \mid f(6) - f(4)^{=4}$

$6 - 5 \mid$

$\left.\right\}$
$5 \mid f(6) - 6$

$4 \mid f(6) - 6$

$3 \mid f(6) - 6$

$2 \mid f(6) - 6$

$\underbrace{(n+1)! - n!}_{= n \cdot n!} \mid f((n+1)!) - f(n!)$

$= f(n+1)! - \underbrace{f(n)!}_{= n!}$

Se so $f(n) = n$ trovo

$$n \cdot n! \mid f(n+1)! - n!$$

$$f(n+1)! \equiv n! \pmod{n \cdot n!}$$

$$\Rightarrow f(n+1) < 2n$$

Caso 1: $f(1) = f(2) = 1$

$$2 \mid 2k - 2 \mid f(2k) - \underset{\substack{\| \\ 1}}{f(2)} \Rightarrow f(2k) \text{ dispari}$$

$$2 \mid (2k+1) - 1 \mid f(2k+1) - f(1) \Rightarrow f(2k+1) \text{ dispari}$$

Se $f(n) > 1 \Rightarrow f(n!) = f(n)!$ pari, assurdo

f e' la costante 1

Caso 2: $f(1) = 2$, $f(2) = 1$

$f(2k)$ dispari,

$$\pmod 2 \quad 1 \equiv f(6) = f(3)! \Rightarrow f(3) = 1$$

$$3 - 1 \mid f(3) - f(1) \quad \text{assurdo}$$

Caso 3: $f(1) = 1$, $f(2) = 2$

Per induz: $f(n) = n$.

$$n \cdot n! \mid f(n+1)! - \underbrace{f(n)!}_{n!}$$

$$\Rightarrow f(n+1) < 2n$$

e $(n+1) - 1 \mid f(n+1) - f(1)$

$$n \mid f(n+1) - 1$$

Quindi $f(n+1) \in \{1, n+1\}$, $f(n+1) = 1$

trovo un assurdo $\Rightarrow$ finisco per induz.

Caso $f(1) = f(2) = 2$ Induzione facile

dice $f(n) = 2 \quad \forall n$

Pb. 2 $P(X)$ NON COSTANTE A COEFF. INTERI

$$\begin{cases} a_0 = n & \text{INTERO POSITIVO} \\ a_{K+1} = P(a_K) & \text{PER } K \geq 0 \end{cases}$$

$\forall b$ INTERO POSITIVO $\exists K$, $\exists n > 1$ INT. POS.

t.c. $a_K = n^b$

$\Longrightarrow$ $P(X)$ HA GRADO 1

i) SE $\deg P(x) \geq 2$, x, $P(x)$, $P(P(x))$, $P(P(P(x)))$ ...

VALE SEMPRE CHE ESISTE C T.C.

SE $|x| > C \longrightarrow |P(x)| > \frac{1}{2}|x|^2$

PER HP. $\exists$ a_k T.C. $|a_k| > C$

BASTA SCEGLIERE b T.C. $2^b > C$

ii) SE $P(x)$ È MONICO

$$P(x) = x^d + \underbrace{Q(x)}_{\deg Q(x) \leq d-1}$$

SE ESISTONO INFINITI INTERI m T.C.

$P(m)$ È UNA POTENZA d-ESIMA

$\Longrightarrow P(x) = R(x)^d$

BASTA SCEGLIERE $b = d, 2d, 3d, 4d, \dots$

TROVIAMO INFINITI K t.c. $P(a_K)$ È UNA POTENZA d-ESIMA

iii) GUARDARE MODULO p^m.

SE PRENDIAMO $b = \phi(p^m)$

SE $(z,p)=1 \rightarrow z^{\phi(p^m)} \equiv 1 \ (p^m)$

SE $(z,p)\neq 1 \rightarrow z^{\phi(p^m)} \equiv 0 \ (p^m)$

$\phi(p^m) \geq m$

$b = \phi(p^m), 2\phi(p^m), 3\phi(p^m), \dots$

iv) RAGIONIAMO MODULO p^m

$$\underset{a_0}{\overset{\parallel}{n}} \xrightarrow{P} a_1 \xrightarrow{P} a_2 \xrightarrow{P} a_3 \rightarrow \dots \xrightarrow{P} \underset{0,1 \ (p^m)}{\overset{}{a_K}} \xrightarrow{P} a_{K+1} \xrightarrow{P} a_{K+2}$$

$a_K \equiv 0,1 \ (p^m)$

CHI È?

$$a_k \equiv a_{k+1} \ (p^m) \quad \left(\begin{array}{c}\text{NON NEC. CON} \\ a_k \equiv 0,1 \ (p^m)\end{array}\right).$$

$$\downarrow$$

$$P(a_k) \equiv P(a_{k+1}) \ (p^m)$$

$$\downarrow$$

$$a_{k+1} \equiv a_{k+2} \ (p^m)$$

$$p^m \mid a_{k+1} - a_k \rightarrow p^m \mid a_{k+2} - a_{k+1}$$

SE $p^m \mid a_{k+1} - a_k$ QUANTO PUÒ VALERE $a_k \pmod{p^m}$?

$$\equiv 0,1 \ (p^m)$$

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \equiv a_{k+1} \equiv a_{k+2} \equiv \ldots \equiv a_j \equiv \ldots \pmod{p^m}$$

NOI SAPPIAMO CHE INFINITI a_j SONO $\equiv 0,1 \ (p^m)$

$p^m \mid a_{k+1} - a_k \rightarrow a_k \equiv 0, 1 \ (p^m)$

$p^m \mid a_{k+1} - a_k \longrightarrow p^m \mid a_k^2 - a_k$

$p^m \mid P(a_k) - a_k \rightarrow p^m \mid a_k^2 - a_k$

$$\Downarrow$$

$$P(a_k) - a_k \mid a_k^2 - a_k$$

$$\forall k \geq 0$$

V) IDEA: $P(n) - n \mid n^2 - n$ PER INFINITI INTERI $n \Longrightarrow P(x) - x \mid x^2 - x$

COME POLINOMIO

(VERA SE $P(x) - x$ È MONICO, MA IN GENERALE "QUASI VERA")

ESISTE UN INTERO POSITIVO L T.C.

$$P(x) - x \mid L(x^2 - x)$$

$P(n) - n \mid n^2 - n$ PER

INFINITI INTERI

- $\deg P(x) \geq 3$:

$$|P(n) - n| \geq \frac{1}{2}|n|^3 > |n^2 - n|$$

$$\forall\, n \text{ t.c. } |n| > C_1$$

- $\deg P(x) = 2$

  - SE $P(x) = ax^2 + bx + c$ CON $|a| \geq 2$ $\forall\, n$ t.c. $|n| > C_2$

$$\rightarrow |P(n) - n| \geq \frac{3}{2}|n|^2 > |n^2 - n|$$

  - $a = 1$

$$x^2 + (b-1)x + c \mid x^2 - x \longrightarrow x^2 + (b-1)x + c \mid bx + c$$

(PER INFINITE SCELTE DI x)

$\rightsquigarrow \quad b=0, \; c=0 \qquad P(x)=x^2$ (1)

- $a=-1$

$-x^2+(b-1)x+c \mid x^2-x \to -x^2+(b-1)x+c \mid$

(PER ∞ SCELTE DI x) $\qquad (b-2)x+c$

$\rightsquigarrow \quad b=2, \; c=0 \qquad P(x)=-x^2+2x$ (2)

(1) SI ESCLUDE NOTANDO CHE SE n NON È UNA POTENZA d-ESIMA CON d DISPARI NESSUN a_k LO SARÀ

(2) PRENDENDO $b=2,4,\ldots$

N3)

$$x^3+y^3+z^3-3xyz =$$
$$= (x+y+z)\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\theta=\sqrt[3]{q}, \quad A=\{n\theta\}, \quad B=\{n\theta^2\}$$

$$x_0=nq, \quad y_0=\lfloor n\theta^2\rfloor\theta, \quad z_0=\lfloor n\theta\rfloor\theta^2$$
$$\qquad\qquad =nq-B\theta \qquad\qquad =nq-A\theta^2$$

$$LHS = m^3q^3 + L\zeta^3\theta^3 + L\zeta^3\theta^6 - 3mqL\zeta\theta L\zeta\theta^2 \in \mathbb{Z}$$

perché $\theta^3 = q \in \mathbb{Z}$

e inoltre $\left.\begin{array}{l} LHS > 0 \\ LHS \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Longrightarrow LHS \geq 1$ *

$$2 \leq \left(3mq - B\theta - A\theta^2\right)\cdot\left((B\theta)^2 + (A\theta^2)^2 + (B\theta - A\theta^2)^2\right)$$

$$\leq 3mq \cdot 2\left(B\theta + A\theta^2\right)^2 = 3mq \cdot 2\theta^4\left(\frac{B}{\theta} + A\right)^2$$

$$\leq 6mq^{17/3}(A+B)^2$$

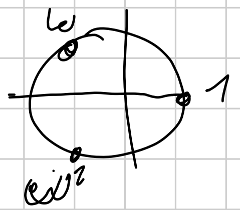
$$A + B \geq \sqrt{\frac{2}{6mq^{17/3}}} = \sqrt{\frac{1}{3q^{17/3}}} \cdot m^{-\frac{1}{2}}$$

*

$$(a + \sqrt{d}\,b)(a - \sqrt{d}\,b) = a^2 - db^2 = \prod_{\theta \in \{\pm\sqrt{d}\}} (a + \theta b)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x + \omega y + \omega^2 z)(x + \omega^2 y + \omega z)$$

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$



$q \in \mathbb{Z}$ $\quad \sqrt[3]{q}, \ \omega\sqrt[3]{q}, \ \omega^2\sqrt[3]{q}$

$$\prod_{\theta \in \{\sqrt[3]{q},\, \omega\sqrt[3]{q},\, \omega^2\sqrt[3]{q}\}} \left(a + b\theta + c\theta^2\right) = a^3 + qb^3 + q^2c^3 - 3qabc$$

*

MISCELLANEA

Note Title 23/01/2020

$\boxed{\text{M2}}$ Per quali n esiste $g(x) : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tale che $g(x), g(x)+x, \dots, g(x)+100x$ siano tutte bigezioni $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Oss Se $g(x)$ e' una bigezione,

$$\{1, 2, \dots, n\} = \{g(1), g(2), \dots, g(n)\}$$

$$\Rightarrow \quad 1+2+\dots+n = g(1)+g(2)+\dots+g(n)$$

$$\sum_{x=1}^{n} x = \boxed{\sum_{x=1}^{n} (g(x)) \equiv \sum_{x=1}^{n} (g(x)+x)} = \dots$$

$$\equiv \sum_{x=1}^{n} (g(x)+100x) \quad (\text{mod } n)$$

$$0 \equiv \sum_{x=1}^{n} x \equiv \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{mod } n)$$

Se una tale $g(x)$ esiste, n e' DISPARI

Esempi: provo $g(x) = x$, le 101 funzioni sono

$$x, \quad 2x, \quad 3x, \quad \dots, \quad 101\,x$$

che sono tutte bigezioni se e solo se

$$(n, 101!) = 1$$

$$\sum_{x=1}^{n} g(x)^2 \equiv \sum_{x=1}^{n} \left(g(x)+x\right)^2 \equiv \sum_{x=1}^{n} \left(g(x)+2x\right)^2 \quad (n)$$

$$\sum g(x)^2 \equiv \sum_{x=1}^{n} \left(g(x)^2+2x\,g(x)+x^2\right) \equiv \sum \left(g(x)^2+4x\,g(x)+4x^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \equiv \underbrace{\sum_{x=1}^{n} \left(2x\,g(x)+x^2\right)}_{\text{questa} \times 2} \equiv \underbrace{\sum_{x=1}^{n} \left(4x\,g(x)+4x^2\right)}_{-\ \text{questa}}$$

$$0 \equiv -\cancel{2} \sum_{x=1}^{n} x^2 \pmod{n}$$

(tanto n e' dispari)

$$0 \equiv \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \pmod{n}$$

$$0 \equiv n(n+1)(2n+1) \quad (6n)$$

$$0 \equiv (n+1)(2n+1) \quad (6)$$

$$\Rightarrow \quad (n, 3) = 1$$

Strategia:

* vorrei dim. che $\sum_{x=1}^{n} x^k \equiv 0 \ (n)$
* da questo vorrei dedurre che $(n, k+1) = 1$ $\quad (\rightsquigarrow k = p-1)$

Consideriamo

$$f(x) = \sum_{x=1}^{n} \left(g(x) + Kx \right)^h$$

Ipotesi: $f(0) = f(1) = \dots = f(100)$

$\boxed{\text{DIFFERENZE FINITE}}$ $f(x) \rightsquigarrow$

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta f(0) = \Delta f(1) = \dots = \Delta f(99) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x)$$

$$= \Big(f(x+2) - f(x+1) \Big) - \Big(f(x+1) - f(x) \Big)$$

$$\Delta^2 f(0) = \Delta^2 f(1) = \dots = \Delta^2 f(98) = 0$$

... avanti così, e se $h \leq 100$ troviamo

$$\Delta^h f(0) = \dots = \Delta^h f(100-h) = 0$$

$$\Delta(x^m) = (x+1)^m - x^m =$$

$$= \cancel{x^m} + m x^{m-1} + \dots - \cancel{x^m}$$

$$\Delta^2(x^m) = m(m-1)x^{m-2} + \dots$$

$$\Delta^m(x^m) = m!$$

Nel nostro caso, $f(k) = \sum_{x=1}^{n} (g(x)+kx)^h$

$$\Rightarrow \Delta^h f(0) \equiv 0\ (n)$$

$$\overset{\parallel}{h! \cdot \sum_{x=1}^{n} x^h} \qquad (*)$$

Per induzione mostriamo che $(n,p)=1$

se $p \le 101$

$p=2,3$ fatti

$p=5$: uso $(*)$ con $h=4$ e trovo

$$\cancel{4!} \sum_{x=1}^{n} x^4 \equiv 0\ (n)$$

per induz, $(4!, n) = 1$

p: uso $(*)$ con $h=p-1$ e trovo

$$\cancel{(p-1)!} \sum x^{p-1} \equiv 0\ (n)$$

Sotto-problema: $\sum_{x=1}^{n} x^{p-1} \equiv 0\ (n) \Rightarrow p \nmid n$

Se $n = pq$ con $(p,q)=1$:

$$\cancel{q} \underbrace{\sum_{x=1}^{p} x^{p-1}} \equiv 0\ (p), \quad \text{assurdo}$$

$\equiv -1$

Caso generale: se $n = p^k \cdot q$ con $(p,q)=1$

$$\sum_{x=1}^{q \cdot p^k} x^{p-1} \equiv 0 \quad (p^k)$$

$$\text{\rotatebox{90}{$\equiv$}}$$

$$\cancel{q} \sum_{x=1}^{p^k} x^{p-1}$$

Mostro per induz. su K che

$$\sum_{x=1}^{p^k} x^{p-1} \not\equiv 0 \quad (p^k)$$

$$\boxed{K \rightsquigarrow K+1} \qquad \sum_{x=1}^{p^{k+1}} x^{p-1} = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=1}^{p^k} \left(i + j \cdot p^k\right)^{p-1}$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=1}^{p^k} \left(i^{p-1} + (p-1)\, i^{p-2} j p^k \right)$$

$$\equiv p \sum_{i=1}^{p^k} i^{p-1} + (p-1)\, p^k \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{p^k} i^{p-2} \right) \left(\sum_{j=0}^{p-1} j \right)}_{\equiv 0 \ (p) \ (\text{esercizio})}$$

$$\equiv p \left(\sum_{i=1}^{p^k} i^{p-1} \right) \not\equiv 0 \quad (\text{mod } p^{k+1})$$

$$(x-a)(x-b)(x-c) = (x-d)(x-e)(x-f)$$

$x+y+z$
$xy+yz+zx$
xyz

$x+y+z$
$x^2+y^2+z^2$
$x^3+y^3+z^3$

$$(n)\quad 0 \equiv \sum_{x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} x(x-1)\cdots(x-(p-2)) \equiv$$

$$\equiv \sum_{x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} (p-1)!\binom{x}{p-1}$$

$$0 \equiv (p-1)!\binom{n}{p} \pmod{p^k}$$

$$\Rightarrow p \nmid n$$

$$P(x,y,z) = P(x,y,xy-z) = P(x, zx-y, z) = P(zy-x, y, z)$$

$$\Rightarrow \quad P(x,y,z) = Q(x^2+y^2+z^2-xyz)$$

↑ Ovvio: tutti questi vanno bene

Idea: induzione su $\deg P$

$\boxed{\text{SE SAPESSI}}$ CHE $\quad P(x,y,z) = a(xyz)^d$ + roba di grado $<d$

allora $\quad P(x,y,z) - a(xyz - x^2 - y^2 - z^2)^d$

avrebbe le stesse simmetrie ma grado inferiore, da cui la tesi per induzione.

— o — o —

Se $P(x) = P(-x) \rightsquigarrow P(x) = Q(x^2)$

$P(x,y,z) = P(x,y,-z) \rightsquigarrow P(x,y,z) = Q(x,y,z^2)$

$P(x) = P(2-x) \rightsquigarrow P(x) \doteq Q((x-1)^2)$

$R(t) = P(1+t) = P(2-(t+1)) = P(1-t) = R(-t)$

$R(t) = Q(t^2) \qquad 1+t = x \rightsquigarrow t = x-1$

$P(x) = P(a-x) \rightsquigarrow P(x) = Q\left(\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right)$

$P(x,y,z) = P(x,y,a-z) \rightsquigarrow P(x,y,z) = Q\left(x,y,\left(z-\frac{a}{2}\right)^2\right)$

$$P(x,y,z) = P(x,y,xy-z) \rightsquigarrow P(x,y,z) = \hat{Q}\left(x,y,\left(z-\frac{xy}{2}\right)^2\right)$$

$$= \hat{Q}\left(x,y, z^2 - zxy + \frac{x^2y^2}{4}\right)$$

$$= \hat{\hat{Q}}\left(x,y, z(z-xy)\right)$$

$$\hat{\hat{Q}}(x,y,z) = \sum_{i,j,k} a_{i,j,k}\, x^i y^j z^k$$

$$\hat{\hat{Q}}(x,y,z(z-xy)) = \sum_{i,j,k} a_{ijk}\, x^i y^j [z(z-xy)]^k$$

Qual è il termine di grado + grande?

Guardo tutte le terne (i, j, k) per cui $a_{ijk} \neq 0$ e tra queste faccio in modo che

$$i + j + 3k \quad \text{sia} \quad \max$$

Questo mi produce un monomio del tipo $x^{i+k} y^{j+k} z^k$ che nessuno può cancellare!!

Per cancellarlo dovrebbe avere $x^{i'+k'} y^{j'+k'} z^{k'} \Rightarrow k = k'$, $j = j'$, $i = i'$

Conseguenza: usando solo l'uguaglianza "che cambia la z" scopriamo che il termine di grado più alto in $P(x,y,z)$ è unico e ha l'esponente di $z \leq$ esp. di x e y.

— o — o —

$\boxed{\text{DELIRIO}}$ Supponiamo di sapere che $P(x,y,z)$ è costante sulla superficie di eq.

$$x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 4$$

$(2,0,0)$ e $(2,2,2)$ verificano

Allora

$$P(x,y,z) - P(2,0,0) = (x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4)\, Q(x,y,z)$$

grado + basso e stesse simmetrie

$$P(x,y,z) - P(2,0,0) = (x^2 + \ldots - 4)\, Q(x,y,z) + \text{resto}$$

$$\text{resto} = A(x,y)\, z + B(x,y)$$

Idea: se x e y sono piccoli, diciamo $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$, allora esistono 2 valori di z t.c.

$$x^2+y^2+z^2-4xyz=4$$

$$z^2-4xyz+x^2+y^2-4=0$$

Per tali x e y l'eq. di 1° grado in z: $A(x,y)z+B(x,y)=0$

ha 2 radici distinte $\Rightarrow$ $A(x,y)=B(x,y)=0$

Se A e B si annullano in un $\square$, allora sono $\equiv 0$ (questo va dimostrato)

$$u+v+w=0 \Rightarrow \cos^2 u+\cos^2 v+\cos^2 w = 4\cos u \cos v \cos w + 1$$

$$x^2+y^2+z^2-4xyz=4$$

$x = 2\cos u \qquad y = 2\cos v \qquad z = 2\cos w$ ☺

$$F(u,v,w) = P(2\cos u, 2\cos v, 2\cos w)$$

Cosa diventano le simmetrie di P?

$$F(u,v,w) = F(u,-v,u-v) \quad \text{e simili}$$

da cui per involuzione delle simmetrie del tipo

$$F(u,v,w) = F(u, v+2u, w-2u)$$

e poi ovviamente

$$F(u+2k\pi, v+2\ell\pi, w-2(k+\ell)\pi)$$

Giocando con queste simmetrie si dim. che F è costante su un denso del piano $u+v+w=0$.

M1

A B 2 giocatori $2n$

A sceglie $a_1 \dots a_{2n}$ $\sum a_i = 1$ $a_i \geq 0$

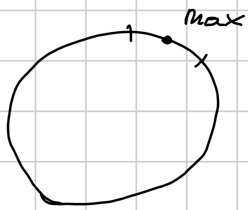
B li può ordinare su una circonferenza e $b_i = a_{\sigma(i)}$

calcola $M = \max \{ b_i \cdot b_{i+1} \text{ (con } i \bmod 2n) \}$

A vuole massimizzare, B minimizzare

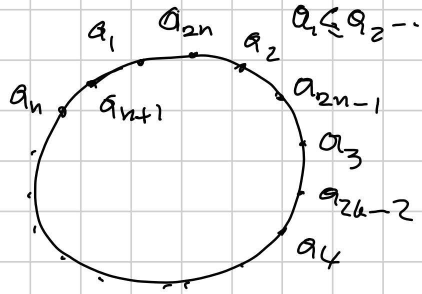
B deve risolvere il problema: dati $a_1 \dots a_{2n}$,

come ordinarli perché M sia minimo?



Per B la cosa migliore sarebbe alternare

$a_1 \leq a_2 \dots \leq a_{2n}$



Dovremmo controllare $a_2 a_{2n}$ $a_3 a_{2n-1}$ $a_4 a_{2n-2} \dots$

non $\overset{\vee|}{a_1 a_{2n}}$ $\overset{\vee|}{a_2 a_{2n-1}}$ $\overset{\vee|}{a_3 a_{2n-2}} \dots$

A deve assicurarsi un prodotto "grandino".

(1) tutti uguali $\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{4n^2}$

(2) $n-1 \to 0$ $\quad n+1 \to \frac{1}{n+1}$ ce ne saranno 2 vicini $\to \left(\frac{1}{n+1}\right)^2$.

(3) 1 grande e $2n-1$ uguali piccoli È meglio?

$$x \qquad \frac{1-x}{2n-1} \qquad \frac{x(1-x)}{2n-1} \to \frac{1}{4(2n-1)}$$

(4) Un vicino di quello grande può pure essere 0!

$$x \qquad \frac{1-x}{2n-2} \qquad \frac{1}{4(2n-2)} = \frac{1}{8(n-1)}$$

Quindi A può sempre ottenere almeno $\frac{1}{8(n-1)}$

B può farsì che M sia sempre $\leq \frac{1}{8(n-1)}$?

Cioè, è vero che $a_2 a_{2n} \quad a_3 a_{2n-1} \cdots \leq \frac{1}{8(n-1)}$?

$$a_k \cdot a_{2n+2-k} \qquad a_{2n+2-k} = y$$

$$a_{2n+2-k} \leq a_{2n+2-k+1} \cdots \leq a_{2n} \qquad a_{2n+2-k} \leq \frac{1}{k+1}$$

E a_k? $\qquad a_{2n+2-k} \leq 1 - \sum_{i > 2n+2-k} a_i$

$$a_k \leq a_{k+1} \leq \cdots \leq a_{2n+2-k-1} \leq \cdots \qquad a_{2n+2-k} \leq \frac{\sum a_i}{k} = \frac{2}{k}$$

Perché a_k sia più grande possibile, $\overbrace{a_k = a_{k+1} = \cdots = a_{2n+2-k-1}}$

$2n+2-k-k$ termini $\sum_{i>2n+2-k} a_i = z$

$(2n+2-2k) \quad a_k \leq 1 - \sum_{i>2n+2-k} a_i - a_{2n+2-k}$.

$a_k \, a_{2n+2-k} \leq z \dfrac{z(1-z)}{(2n+2-2k)2k}$ Di nuovo, massimo in z è per $z = \frac{1}{2}$

Devo anche scegliere il peggior k possibile $k=2$

$\dfrac{1}{4 \cdot 2(n-1)} \quad \dfrac{1}{8(n-1)}$.