

# XVIII GARA NAZIONALE A SQUADRE



[olimpiadi.dm.unibo.it](http://olimpiadi.dm.unibo.it)  
[www.oliforum.it](http://www.oliforum.it)  
[www.facebook.com/EGM02018](https://www.facebook.com/EGM02018)

Semifinale A - 5 Maggio 2017

## ISTRUZIONI GENERALI

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

## SCADENZE IMPORTANTI

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

### 1. L'INCONTRO

Nel Maggio di moltissimi anni fa, diversi matematici si ritrovarono in una locanda; si accorsero subito di essere esattamente tanti quanti gli interi  $n$ , compresi tra 100 e 10000, tali che il loro fattoriale  $n!$  è un multiplo di  $2^{n-1}$ . Dopo essersi contati, decisero che erano nel giusto numero per intraprendere il pellegrinaggio alla tomba di Archimede. Quanti erano?

### 2. L'INNO

Uno dei matematici era anche un musicista, e decise di comporre una sonata per allietare i suoi compagni. Ha a disposizione 12 note distinte (tra cui, ma ovviamente non solo, ut, re, mi, fa, sol, la, si) e vuole che nella sua composizione ognuna compaia esattamente una volta. Inoltre si accorge che alcune sequenze sono più armoniose delle altre; in particolare quelle in cui l'ut compare prima del mi (non necessariamente subito prima), re, sol e si compaiono in quest'ordine (non per forza consecutivamente) e il fa è tra le prime 3 note. Detto  $n$  il numero di composizioni armoniose e  $m$  il numero totale di composizioni possibili, dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione  $\frac{n}{m}$  ridotta ai minimi termini.

### 3. UN LIBRO ENORME

Appena iniziato il viaggio, i pellegrini si misero subito a parlare dei loro testi preferiti: l'*Arithmetica*, gli *Elementi*, etc. Uno di loro esclamò: "Sapete che conosco un monaco amanuense? Una volta si mise a scrivere un libro contenente tutte le parole di 2015 lettere, composte da esattamente 13 'A' e 2002 'B'; in ogni pagina tranne l'ultima ci sono esattamente 2017 parole. Riuscite a calcolare quante parole ci sono nell'ultima pagina del libro?". Gli altri matematici risposero prontamente.

### 4. [★] L'ARMONIA DELLE SFERE

"Gli alchimisti", pontificava uno di loro, "consideravano armoniosi gli interi positivi che si potevano scrivere come somma di un intero positivo  $x$ , di un intero positivo  $y$  multiplo di  $x$ , e di un intero positivo  $z$  multiplo di  $y$ . Tutti diversi tra loro, ovviamente. Sapreste dirmi quanto vale la somma di tutti i numeri interi minori di 10000 che **non** sono armoniosi?"

### 5. ADDESTRAMENTO

Lungo il tragitto i pellegrini si trovarono nei pressi di un campo d'addestramento, nel quale alcuni soldati si allenavano a gruppetti, di dimensioni tutte diverse; notarono subito che il minimo comune multiplo della dimensione dei vari gruppetti era esattamente 160. Quante sono le possibili suddivisioni che essi possono aver visto?

### 6. LA MIGLIORE ARMA D'ASSEDIO

Passando di fianco ad un castello distrutto, uno dei pellegrini disse: "Io mi occupo anche di costruire macchine da guerra, e questo castello è sicuramente stato abbattuto da un trabucco. Quelli che progetto io sono in grado di scagliare massi di 90kg in un qualunque punto di una figura pentagonale avente 3 lati consecutivi che misurano  $x$  metri, e i due angoli tra loro compresi che misurano  $120^\circ$ ; gli altri due lati misurano  $2x$  metri ciascuno. Sapendo che l'area del pentagono è di  $44800\sqrt{3}\text{m}^2$ , quanto vale  $x$ ?"

### 7. PESTE NERA

"La peste del 1347 ha davvero ucciso moltissime persone", osservò uno dei pellegrini. "Ne ho studiato attentamente la diffusione e ho scoperto che se chiamiamo  $a_n$  le persone infette al giorno  $n$  dall'inizio dell'epidemia, vale  $a_n = a_{n-1} + 9a_{n-2} + 9^2a_{n-3} + \dots + 9^{n-1}a_0$  per  $n \geq 1$ . Sapendo che  $a_0 = 2017$ , quante cifre ha il numero di persone infette al giorno 2017?"

## 8. [★] L'ISCRIZIONE

I pellegrini giunsero innanzi a un'antica iscrizione che si leggeva a malapena; uno di loro, studioso di latino, la tradusse: "il rapporto tra i due numeri interi positivi è  $0,2017\dots$ "; i decimali successivi al sette erano però cancellati dal tempo e illeggibili. Quanto vale, al minimo, la somma di tali due numeri?

## 9. CODICI SEGRETI

"I cavalieri templari sono un ordine che nasconde molti segreti" affermò un viaggiatore. "Sono venuto a contatto con uno dei loro sistemi di cifratura, che consisteva nel trovare la minima base  $b$  intera positiva in cui il numero  $\frac{5445469}{5445468}$  si scrive con un numero finito di cifre dopo la virgola. Ovviamente l'ho risolto subito, e ho scoperto che  $b$  valeva. . ." *Numeratore e denominatore sono scritti in base 10.*

## 10. STRUMENTI DI TORTURA

Discutendo di religione, uno dei matematici si mise a descrivere un complicato strumento di tortura dell'inquisizione spagnola: partendo da un cubo di lato 568mm, su ogni faccia viene incollata una piramide a base quadrata -coincidente con la faccia del cubo- e le cui facce laterali sono triangoli equilateri. "Ma è orribile!" disse inorridito un altro "Però ha una forma davvero interessante, mi chiedo quanto sia lungo in millimetri il percorso minimo che unisce due vertici opposti qualunque del solido muovendosi sulla sola superficie..." *Nota: due vertici si dicono opposti se sono simmetrici rispetto al centro del cubo.*

## 11. [★] INVENZIONI FUTURISTICHE

Il percorso passava vicino alla città di Vinci, così uno dei pellegrini propose di passare a salutare un suo amico, Leonardo. Questi mostrò loro un apparecchio rivoluzionario: nel futuro si sarebbe chiamato "orologio digitale", diceva. Mostrava infatti ore e minuti utilizzando quattro cifre decimali nella forma  $ab : cd$  (dalle  $00 : 00$  alle  $23 : 59$ ). "Dato che siete matematici", disse Leonardo "perché non mi dite quante volte nell'arco della giornata accade che  $abcd = k \cdot ab \cdot cd$ , per un qualche intero  $k$ ?" *Con  $abcd$  si intende il numero decimale composto dalle quattro cifre  $a, b, c, d$ , e similmente per  $ab$  e  $cd$ .*

## 12. SCACCHIERA INCOMPLETA

Giunti ad una locanda lungo il cammino, dopo essersi ristorati, uno dei viandanti tirò fuori una scacchiera da viaggio: era composta da 4 scacchiere  $5 \times 5$  che composte insieme formavano una scacchiera  $10 \times 10$ ; mentre la stava montando, in particolare quando mancava solo il quadrante in basso a destra, si fermò a guardare quella figura a forma di L rovesciata e si chiese: "Quanti saranno i percorsi che portano dalla casella in basso a sinistra a quella in alto a destra?". Un matematico rispose: "Infiniti ovviamente! Però se aggiungiamo l'ipotesi che ci si può muovere solo verso l'alto o verso destra, diventa un problema non banale. Qual è la sua soluzione?"

## 13. [★] SORTITE CASUALI

"Io ho studiato attentamente le strategie militari delle crociate", affermò uno dei pellegrini, appena ebbero superato il campo di addestramento. "In particolare, durante l'assedio di Gerusalemme ogni giorno gli arabi tentavano una sortita da una delle quattro diverse porte della città, situate nei quattro punti cardinali. Il primo giorno di assedio usarono la porta a Nord, e dal secondo giorno adottarono uno stratagemma particolare per disorientare l'esercito di Goffredo di Buglione: all'alba tiravano una moneta, e se fosse uscita testa sarebbero usciti dalla stessa porta del giorno precedente, altrimenti da quella successiva in senso antiorario. (la successione è quindi Nord-Ovest-Sud-Est)". Qual è la probabilità che il 52-esimo giorno di assedio gli arabi prendano la porta a Nord? *Dare come risposta le ultime quattro cifre della somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

## 14. CURIOSI POLINOMI

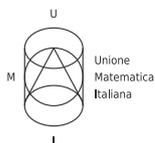
Uno dei matematici rivelò agli altri che stava studiando i polinomi, nella speranza di trovare una formula per il terzo grado. "Durante il mio lavoro, mi sono imbattuto in certi polinomi molto particolari: se chiamiamo  $n$  la somma dei coefficienti di  $p(x)$ , allora  $p(2017) = n!$ . Qual è il più grande  $n$  minore di 10000 tale per cui esista un polinomio  $p$  a coefficienti interi che soddisfi queste condizioni?"

## 15. [★] LA GIOSTRA

"Il sovrano del mio paese mi ha chiesto di progettare un recinto per un torneo molto particolare" disse un matematico. "Vuole che la zona principale sia un trapezio  $ABCD$ , con base maggiore  $AB$ , circoscritto a una circonferenza  $\Gamma$  di raggio  $R$ ; vi è poi un'area secondaria costruita prendendo un punto  $E$  sul prolungamento di  $CD$  dalla parte di  $C$ , esterno al segmento  $CD$ , e disegnando la circonferenza inscritta al triangolo  $\triangle CEB$  di raggio  $r$ . Tutto questo deve seguire una ben precisa proporzione: detto  $F$  il punto di intersezione delle rette  $AD$  e  $BC$ , deve valere  $R : r = AF : BE = 2$ . In quanti modi posso scegliere dei valori interi per le lunghezze  $AB$  e  $BF$  in modo che  $1 \leq BF < AB \leq 53$ ?"

## 16. INCISIONI SULLA LAPIDE

Giunti finalmente a destinazione, i nostri pellegrini trovarono la tomba di Archimede, sulla cui lapide era inciso un eptagono regolare  $ABCDEFGH$  di centro  $O$ . Con grande disappunto videro che l'incisione era stata vandalizzata con alcune righe: il vandalo aveva preso il punto  $X$  simmetrico di  $D$  rispetto alla retta  $BG$ , poi aveva intersecato le rette  $XB$  e  $GO$  in  $Y$ . Tuttavia osservarono che l'angolo convesso  $\angle CYG$  aveva un valore interessante se espresso in gradi. Quant'è tale numero? *Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*



# XVIII GARA NAZIONALE A SQUADRE



[olimpiadi.dm.unibo.it](http://olimpiadi.dm.unibo.it)  
[www.oliforum.it](http://www.oliforum.it)  
[www.facebook.com/EGM02018](https://www.facebook.com/EGM02018)

Semifinale A - Soluzioni - 5 Maggio 2017

Nr.	Problema	Soluzione
1	L'incontro	0007
2	L'inno	0049
3	Un libro enorme	2003
4	[*]L'armonia delle sfere	0065
5	Addestramento	3040
6	La migliore arma d'assedio	0160
7	Peste nera	2020
8	[*]L'iscrizione	0137
9	Codici segreti	0042
10	Strumenti di tortura	1502
11	[*]Invenzioni futuristiche	0016
12	Scacchiera incompleta	4310
13	[*]Sortite casuali	2159
14	Curiosi polinomi	8064
15	[*]La giostra	0676
16	Incisioni sulla lapide	0277



# Semifinale A - Cesenatico 2017 - Classifica finale squadre

00:00

Landi, Velletri 1021

876	Volta, Milano
856	Da Vinci, Treviso
787	Alessi, Perugia
726	Copernico, Brescia
714	Leopardi, Recanati
534	Pellati, Nizza Monferrato
469	Zanelli, Reggio Emilia
456	Ferraris [F], Torino
454	Marzoli, Palazzolo sull'Oglio
422	Majorana, Mirano
370	Malignani, Udine
353	Paschini [F], Tolmezzo
352	Marinelli, Udine
343	Leonardo, Giarre
323	Don Bosco, Milano
320	Pacinotti, La Spezia
317	Mascheroni, Bergamo
316	Lussana, Bergamo
257	Ariosto-Spallanzani [F], Reggio Emilia
253	Rummo, Benevento
251	Genoino, Cava De Tirreni
243	Majorana-Arcoleo, Caltagirone
241	Copernico-Luxemburg, Torino
232	Moretti, Gardone Val Trompia
232	Calini [F], Brescia
214	Curie, Giulianova
184	Battaglini [F], Taranto
184	Galilei, Trieste
181	Convitto Nazionale, Cividale del Friuli
170	Gramsci, Firenze
141	Sbordone, Napoli
981	Fazekas, Budapest
888	Ruthin School, Ruthin
835	Skoda, Prerov
341	Vianu, Bucarest



# Semifinale A - Cesenatico 2017 - Classifica domande

00:00

L'incontro

28

L'inno

34

Un libro enorme

34

L'armonia delle sfere

90

Addestramento

62

La migliore arma d'assedio

26

Peste nera

33

L'iscrizione

92

Codici segreti

42

Strumenti di tortura

76

Invenzioni futuristiche

96

Scacchiera incompleta

43

Sortite casuali

69

Curiosi polinomi

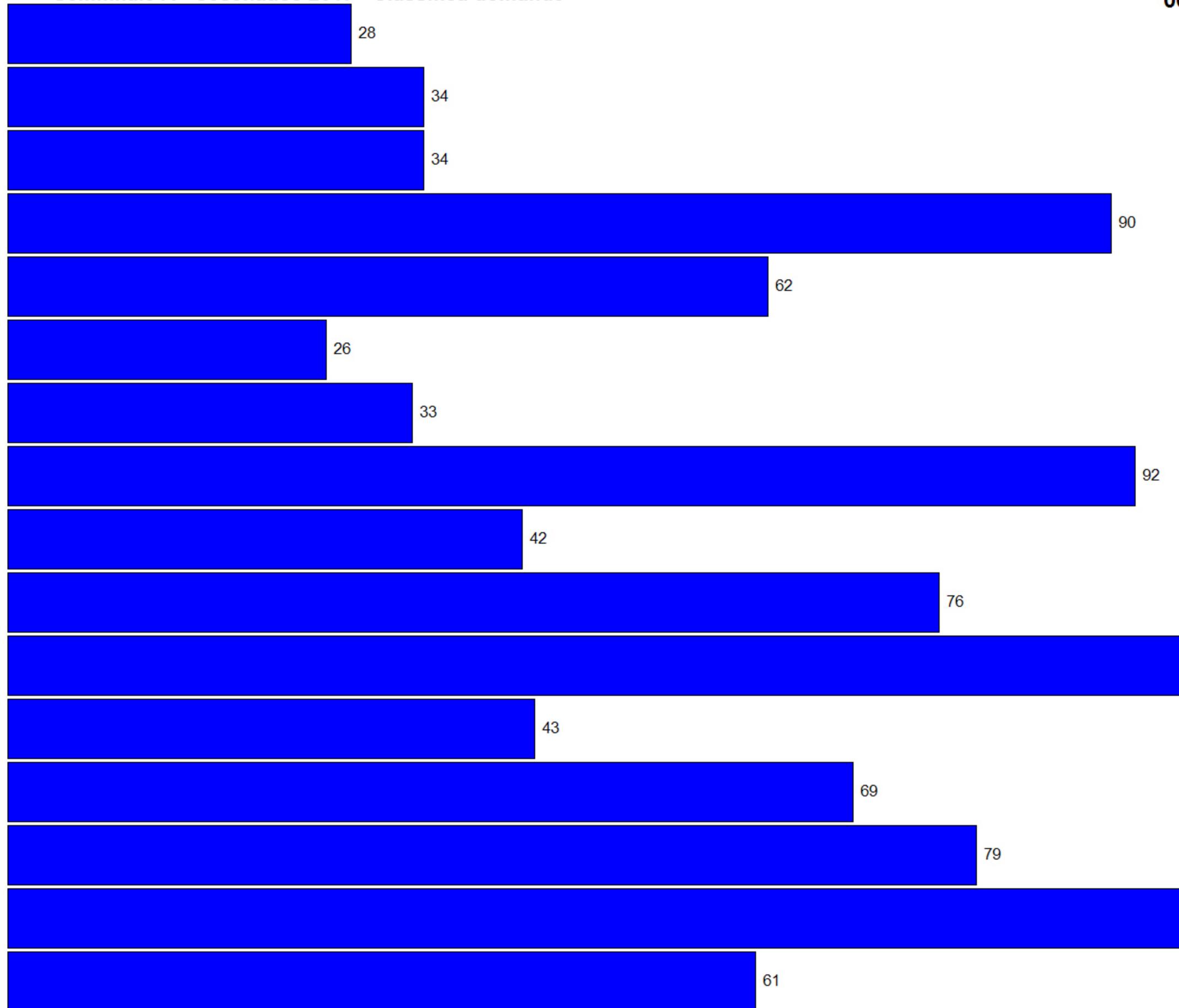
79

La giostra

96

Incisioni sulla lapide

61





Semifinale A - Cesenatico 2017 - Stato squadre

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16					
02) Curie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2	12	13	14	15	16					
03) Marinelli	1	2	3	4	5	4	7	8	2	10	11	12	13	14	15	16					
04) Da Vinci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	1					
05) Rummo	1	2	3	4	5	2	7	8	2	9	10	2	13	1	14	15					
06) Malignani	1	2	3	1	4	1	6	3	7	8	9	10	11	12	13	14	16				
07) Majorana	1	2	3	1	4	5	6	7	8	9	10	2	11	12	13	14	16				
08) Ariosto-Spallanzani [F]	1	2	3	4	5	2	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16				
09) Zanelli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2	11	1	12	13	14	15				
10) Mascheroni	1	2	3	4	5	6	7	8	1	9	10	11	1	12	6	13	3				
11) Gramsci	1	2	3	4	5	3	6	7	8	9	10	11	12	2	13	14	15	16			
12) Majorana-Arcoleo	1	2	3	1	4	5	6	7	8	9	10	1	11	12	2	13	14	15			
13) Calini [F]	1	2	3	4	5	1	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16				
14) Copernico	1	2	1	3	4	2	5	6	7	1	8	9	10	11	12	13	14	15			
15) Battaglini [F]	1	2	3	4	5	6	1	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16				
16) Leonardo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	6	11	12	1	13	14	15	16			
17) Leopardi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	1	16				
18) Pacinotti	1	2	1	3	4	5	6	7	8	9	1	10	2	11	12	13	1	14			
19) Sbordone	1	2	2	3	4	5	2	6	7	8	9	10	2	11	12	1	13	14	1		
20) Lussana	1	2	3	4	5	2	6	7	8	2	9	10	1	11	12	13	14	15	16		
21) Copernico-Luxemburg	1	2	3	4	5	6	7	8	1	9	10	11	1	12	1	13	14	15	16		
22) Moretti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3	11	1	12	4	13	14	15	16		
23) Marzoli	1	2	3	4	5	1	6	7	8	9	1	10	11	12	13	14	15	16			
24) Paschini [F]	1	2	3	4	5	2	6	7	8	9	10	2	11	12	13	14	15	16			
25) Don Bosco	1	1	2	1	3	4	5	6	7	8	9	10	1	11	1	12	1	13	14	1	
26) Genoino	1	2	1	3	4	5	3	6	7	2	8	9	10	11	12	3	13	14	15	16	
27) Convitto Nazionale	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2	11	12	1	13	14	15	16			
28) Ferraris [F]	1	2	3	4	5	2	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16				
29) Landi	1	2	3	4	5	6	7	1	8	4	9	10	11	12	13	14	15	16			
30) Galilei	1	2	3	4	5	1	6	7	8	9	10	2	11	12	1	13	14	15	16		
31) Pellati	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2	11	12	13	14	15	16				
32) Alessi	1	2	3	4	5	6	7	8	1	9	10	1	11	12	13	14	15	16			
33) Skoda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16					
34) Ruthin School	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3	11	12	13	14	15	16				
35) Fazekas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16					
36) Vianu	1	2	2	3	4	2	5	6	7	8	1	9	10	2	11	12	2	13	14	15	16



# Semifinale B - Cesenatico 2017 - Classifica finale squadre

00:00

898	Marconi, Carrara
870	Nievo, Padova
772	Curie, Pinerolo
712	Copernico, Udine
681	Cassini, Genova
672	Tron, Schio
671	Galilei, Catania
650	Spano, Sassari
642	Righi, Roma
605	Redi, Arezzo
583	Corni, Modena
525	Galilei, Alessandria
516	Copernico, Prato
459	Pacinotti, Cagliari
455	Marconi, Conegliano
443	De Giorgi, Lecce
419	Marconi, Foligno
404	Galilei, Verona
380	Taramelli, Pavia
364	Bassa Friulana, Cervignano
349	Vercelli, Asti
318	Maffei, Riva Del Garda
297	Gobetti, Torino
260	Principe di Napoli [F], Assisi
254	Enriques, Livorno
229	Torricelli [F], Faenza
207	Mercalli, Napoli
167	Poliziano, Montepulciano
130	Oliveti [F], Locri
127	Romita [F], Campobasso
117	Grassi [F], Latina



L'incontro

## Semifinale B - Cesenatico 2017 - Classifica domande

00:00

L'inno

Un libro enorme

L'armonia delle sfere

Addestramento

La migliore arma d'assedio

Peste nera

L'iscrizione

Codici segreti

Strumenti di tortura

Invenzioni futuristiche

Scacchiera incompleta

Sortite casuali

Curiosi polinomi

La giostra

Incisioni sulla lapide

31

51

37

92

56

27

47

70

46

87

96

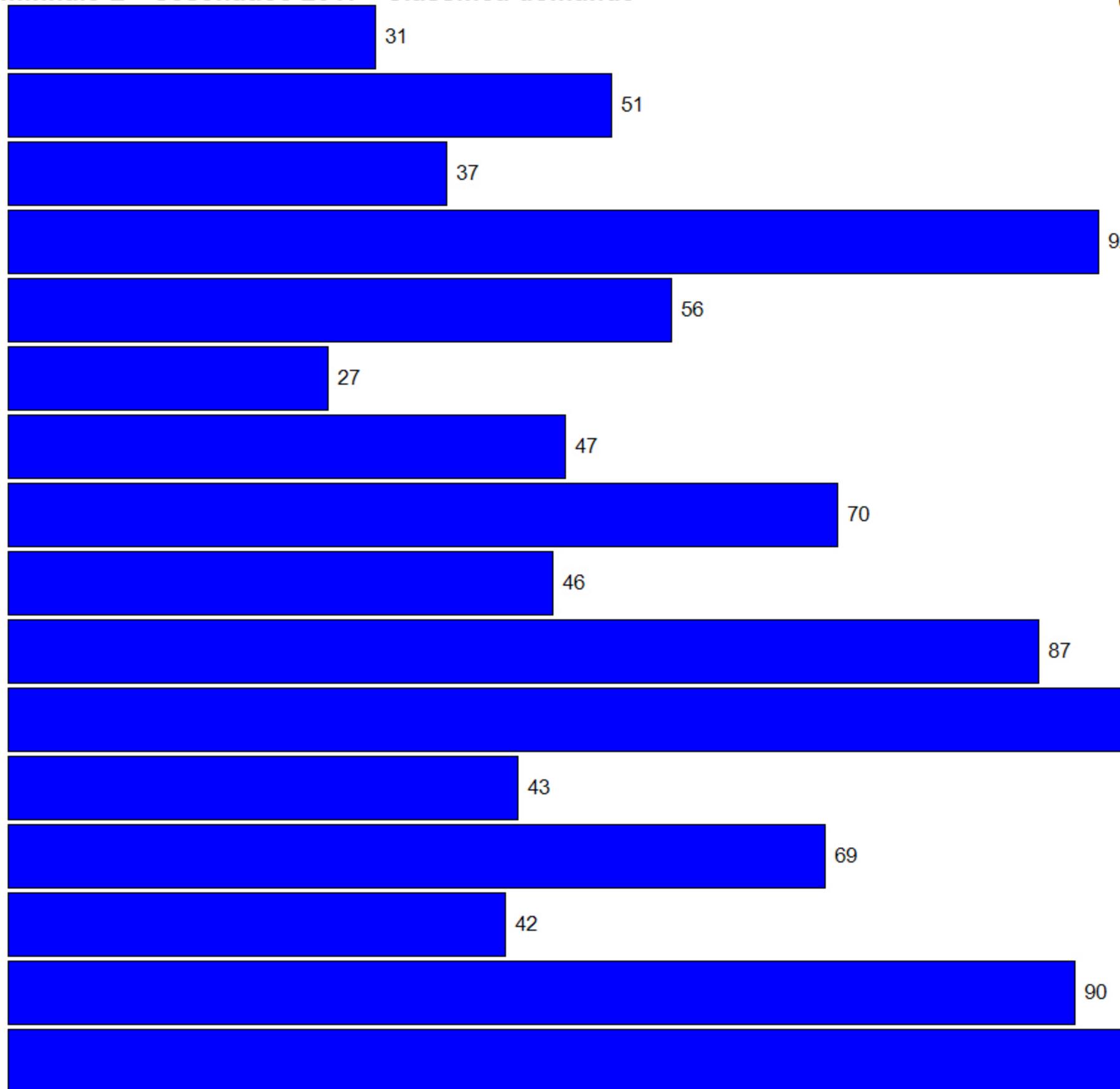
43

69

42

90

94

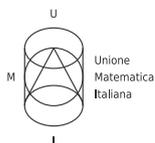




# Semifinale B - Cesenatico 2017 - Stato squadre

00:00

01) Maffei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
02) Taramelli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
03) Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
04) Righi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
05) Pacinotti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
06) Gobetti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
07) Grassi [F]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
08) Corni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
09) Marconi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10) Cassini	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
11) Marconi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
12) Copernico	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
13) Torricelli [F]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
14) Enriques	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
15) Poliziano	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
16) Redi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17) Oliveti [F]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
18) Nievo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
19) Marconi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
20) Curie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
21) Bassa Friulana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
22) Vercelli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
23) Romita [F]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
24) Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
25) Spano	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
26) Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
27) Principe di Napoli [F]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
28) Tron	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
29) De Giorgi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
30) Mercalli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
31) Copernico	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16



# XVIII GARA NAZIONALE A SQUADRE



[olimpiadi.dm.unibo.it](http://olimpiadi.dm.unibo.it)  
[www.oliforum.it](http://www.oliforum.it)  
[www.facebook.com/EGM02018](https://www.facebook.com/EGM02018)

Semifinale B - 5 Maggio 2017

## ISTRUZIONI GENERALI

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

## SCADENZE IMPORTANTI

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

### 1. L'INCONTRO

Nel Maggio di moltissimi anni fa, diversi matematici si ritrovarono in una locanda; si accorsero subito di essere esattamente tanti quanti gli interi  $n$ , compresi tra 100 e 20000, tali che il loro fattoriale  $n!$  è un multiplo di  $2^{n-1}$ . Dopo essersi contati, decisero che erano nel giusto numero per intraprendere il pellegrinaggio alla tomba di Archimede. Quanti erano?

### 2. UN LIBRO ENORME

Appena iniziato il viaggio, i pellegrini si misero subito a parlare dei loro testi preferiti: l'*Arithmetica*, gli *Elementi*, etc. Uno di loro esclamò: "Sapete che conosco un monaco amanuense? Una volta si mise a scrivere un libro contenente tutte le parole di 2015 lettere, composte da esattamente 11 'A' e 2004 'B'; in ogni pagina tranne l'ultima ci sono esattamente 2017 parole. Riuscite a calcolare quante parole ci sono nell'ultima pagina del libro?". Gli altri matematici risposero prontamente.

### 3. [★] L'ARMONIA DELLE SFERE

"Gli alchimisti", pontificava uno di loro, "consideravano armoniosi gli interi positivi che si potevano scrivere come somma di un intero positivo  $x$ , di un intero positivo  $y$  multiplo di  $x$ , e di un intero positivo  $z$  multiplo di  $y$ . Tutti diversi tra loro, ovviamente. Sapreste dirmi quanto vale la somma di tutti i numeri interi minori di 10000 che **non** sono armoniosi?"

### 4. [★] LA GIOSTRA

"Il sovrano del mio paese mi ha chiesto di progettare un recinto per un torneo molto particolare" disse un matematico. "Vuole che la zona principale sia un trapezio  $ABCD$ , con base maggiore  $AB$ , circoscritto a una circonferenza  $\Gamma$  di raggio  $R$ ; vi è poi un'area secondaria costruita prendendo un punto  $E$  sul prolungamento di  $CD$  dalla parte di  $C$ , esterno al segmento  $CD$ , e disegnando la circonferenza inscritta al triangolo  $\triangle CEB$  di raggio  $r$ . Tutto questo deve seguire una ben precisa proporzione: detto  $F$  il punto di intersezione delle rette  $AD$  e  $BC$ , deve valere  $R : r = AF : BE = 2$ . In quanti modi posso scegliere dei valori interi per le lunghezze  $AB$  e  $BF$  in modo che  $1 \leq BF < AB \leq 55$ ?"

### 5. L'INNO

Uno dei matematici era anche un musicista, e decise di comporre una sonata per allietare i suoi compagni. Ha a disposizione 12 note distinte (tra cui, ma ovviamente non solo, ut, re, mi, fa, sol, la, si) e vuole che nella sua composizione ognuna compaia esattamente una volta. Inoltre si accorge che alcune sequenze sono più armoniose delle altre; in particolare quelle in cui l'ut compare prima del mi (non necessariamente subito prima), sol, si e re compaiono in quest'ordine (non per forza consecutivamente) e il fa è tra le prime 3 note. Detto  $n$  il numero di composizioni armoniose e  $m$  il numero totale di composizioni possibili, dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione  $\frac{n}{m}$  ridotta ai minimi termini.

### 6. [★] L'ISCRIZIONE

I pellegrini giunsero innanzi a un'antica iscrizione che si leggeva a malapena; uno di loro, studioso di latino, la tradusse: "il rapporto tra i due numeri interi positivi è  $0,2017\dots$ "; i decimali successivi al sette erano però cancellati dal tempo e illeggibili. Quanto vale, al minimo, la somma di tali due numeri?

### 7. ADDESTRAMENTO

Lungo il tragitto i pellegrini si trovarono nei pressi di un campo d'addestramento, nel quale alcuni soldati si allenavano a gruppetti, di dimensioni tutte diverse; notarono subito che il minimo comune multiplo della dimensione dei vari gruppetti era esattamente 160. Quante sono le possibili suddivisioni che essi possono aver visto?

## 8. LA MIGLIORE ARMA D'ASSEDIO

Passando di fianco ad un castello distrutto, uno dei pellegrini disse: "Io mi occupo anche di costruire macchine da guerra, e questo castello è sicuramente stato abbattuto da un trabucco. Quelli che progetto io sono in grado di scagliare massi di 90 kg in un qualunque punto di una figura pentagonale avente 3 lati consecutivi che misurano  $x$  metri, e i due angoli tra loro compresi che misurano  $120^\circ$ ; gli altri due lati misurano  $2x$  metri ciascuno. Sapendo che l'area del pentagono è di  $56700\sqrt{3}\text{m}^2$ , quanto vale  $x$ ?"

## 9. PESTE NERA

"La peste del 1347 ha davvero ucciso moltissime persone", osservò uno dei pellegrini. "Ne ho studiato attentamente la diffusione e ho scoperto che se chiamiamo  $a_n$  le persone infette al giorno  $n$  dall'inizio dell'epidemia, vale  $a_n = a_{n-1} + 9a_{n-2} + 9^2a_{n-3} + \dots + 9^{n-1}a_0$  per  $n \geq 1$ . Sapendo che  $a_0 = 2017$ , quante cifre ha il numero di persone infette al giorno 1000?"

## 10. STRUMENTI DI TORTURA

Discutendo di religione, uno dei matematici si mise a descrivere un complicato strumento di tortura dell'inquisizione spagnola: partendo da un cubo di lato 632 mm, su ogni faccia viene incollata una piramide a base quadrata -coincidente con la faccia del cubo- e le cui facce laterali sono triangoli equilateri. "Ma è orribile!" disse inorridito un altro "Però ha una forma davvero interessante, mi chiedo quanto sia lungo in millimetri il percorso minimo che unisce due vertici opposti qualunque del solido muovendosi sulla sola superficie..." *Nota: due vertici si dicono opposti se sono simmetrici rispetto al centro del cubo.*

## 11. CODICI SEGRETI

"I cavalieri templari sono un ordine che nasconde molti segreti" affermò un viaggiatore. "Sono venuto a contatto con uno dei loro sistemi di cifratura, che consisteva nel trovare la minima base  $b$  intera positiva in cui il numero  $\frac{4840417}{4840416}$  si scrive con un numero finito di cifre dopo la virgola. Ovviamente l'ho risolto subito, e ho scoperto che  $b$  valeva..." *Numeratore e denominatore sono scritti in base 10.*

## 12. SCACCHIERA INCOMPLETA

Giunti ad una locanda lungo il cammino, dopo essersi ristorati, uno dei viandanti tirò fuori una scacchiera da viaggio: era composta da 4 scacchiere  $5 \times 5$  che composte insieme formavano una scacchiera  $10 \times 10$ ; mentre la stava montando, in particolare quando mancava solo il quadrante in basso a destra, si fermò a guardare quella figura a forma di L rovesciata e si chiese: "Quanti saranno i percorsi che portano dalla casella in basso a sinistra a quella in alto a destra?". Un matematico rispose: "Infiniti ovviamente! Però se aggiungiamo l'ipotesi che ci si può muovere solo verso l'alto o verso destra, diventa un problema non banale. Qual è la sua soluzione?"

## 13. [★] INVENZIONI FUTURISTICHE

Il percorso passava vicino alla città di Vinci, così uno dei pellegrini propose di passare a salutare un suo amico, Leonardo. Questi mostrò loro un apparecchio rivoluzionario: nel futuro si sarebbe chiamato "orologio digitale", diceva. Mostrava infatti ore e minuti utilizzando quattro cifre decimali nella forma  $ab:cd$  (dalle 00:00 alle 23:59). "Dato che siete matematici", disse Leonardo "perché non mi dite quante volte nell'arco della giornata accade che  $abcd = k \cdot ab \cdot cd$ , per un qualche intero  $k$ ?" *Con  $abcd$  si intende il numero decimale composto dalle quattro cifre  $a, b, c, d$ , e similmente per  $ab$  e  $cd$ .*

## 14. [★] SORTITE CASUALI

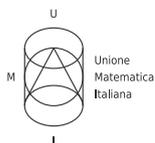
"Io ho studiato attentamente le strategie militari delle crociate", affermò uno dei pellegrini, appena ebbero superato il campo di addestramento. "In particolare, durante l'assedio di Gerusalemme ogni giorno gli arabi tentavano una sortita da una delle quattro diverse porte della città, situate nei quattro punti cardinali. Il primo giorno di assedio usarono la porta a Nord, e dal secondo giorno adottarono uno stratagemma particolare per disorientare l'esercito di Goffredo di Buglione: all'alba tiravano una moneta, e se fosse uscita testa sarebbero usciti dalla stessa porta del giorno precedente, altrimenti da quella successiva in senso antiorario. (la successione è quindi Nord-Ovest-Sud-Est)". Qual è la probabilità che il 52-esimo giorno di assedio gli arabi prendano la porta a Nord? *Dare come risposta le ultime quattro cifre della somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

## 15. CURIOSI POLINOMI

Uno dei matematici rivelò agli altri che stava studiando i polinomi, nella speranza di trovare una formula per il terzo grado. "Durante il mio lavoro, mi sono imbattuto in certi polinomi molto particolari: se chiamiamo  $n$  la somma dei coefficienti di  $p(x)$ , allora  $p(2017) = n!$ . Qual è il più grande  $n$  minore di 7500 tale per cui esista un polinomio  $p$  a coefficienti interi che soddisfi queste condizioni?"

## 16. INCISIONI SULLA LAPIDE

Giunti finalmente a destinazione, i nostri pellegrini trovarono la tomba di Archimede, sulla cui lapide era inciso un eptagono regolare  $ABCDEFGH$  di centro  $O$ . Con grande disappunto videro che l'incisione era stata vandalizzata con alcune righe: il vandalo aveva preso il punto  $X$  simmetrico di  $D$  rispetto alla retta  $BG$ , poi aveva intersecato le rette  $XB$  e  $GO$  in  $Y$ . Tuttavia osservarono che l'angolo convesso  $\angle CYG$  aveva un valore interessante se espresso in gradi. Quant'è tale numero? *Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*



# XVIII GARA NAZIONALE A SQUADRE



[olimpiadi.dm.unibo.it](http://olimpiadi.dm.unibo.it)  
[www.oliforum.it](http://www.oliforum.it)  
[www.facebook.com/EGM02018](https://www.facebook.com/EGM02018)

Semifinale B - Soluzioni - 5 Maggio 2017

Nr.	Problema	Soluzione
1	L'incontro	0008
2	Un libro enorme	2005
3	[*]L'armonia delle sfere	0065
4	[*]La giostra	0729
5	L'inno	0049
6	[*]L'iscrizione	0137
7	Addestramento	3040
8	La migliore arma d'assedio	0180
9	Peste nera	1003
10	Strumenti di tortura	1672
11	Codici segreti	0042
12	Scacchiera incompleta	4310
13	[*]Invenzioni futuristiche	0016
14	[*]Sortite casuali	2159
15	Curiosi polinomi	6048
16	Incisioni sulla lapide	0277



# Semifinale C - Cesenatico 2017 - Classifica finale squadre

00:00

911	Ferraris, Torino
909	Corradini, Thiene
601	Ariosto-Spallanzani, Reggio Emilia
590	Fermi, Cantu'
570	Capirola, Leno
570	Leonardo da Vinci, Firenze
549	Oberdan, Trieste
547	Battaglini, Taranto
537	Einstein, Palermo
537	Calini, Brescia
461	Majorana, Brindisi
444	Marconi-Delpino, Chiavari
414	Fermi, Genova
411	Michelangelo, Cagliari
379	Paleocapa, Rovigo
356	Da Vinci [F], Treviso
346	Paschini, Tolmezzo
343	Marconi, Foggia
339	Flaminio, Vittorio Veneto
307	Mazzini, Napoli
295	Copernico, Bologna
288	Corbino, Siracusa
272	Marinelli [F], Udine
261	Alfano da Termoli [F], Termoli
247	Pascal, Reggio Emilia
239	Rosetti, San Benedetto del Tronto
226	Volta, Colle Val d'Elsa
168	Citta' di Piero, Sansepolcro
145	Messadaglia [F], Verona
118	Galilei, Pescara
113	Le Filandiere, San Vito al Tagliamento
90	Plinio Seniore [F], Roma



# Semifinale C - Cesenatico 2017 - Classifica domande

00:00

L'incontro

32

Un libro enorme

29

L'armonia delle sfere

90

La giostra

92

L'inno

36

L'iscrizione

68

Addestramento

84

La migliore arma d'assedio

25

Peste nera

33

Strumenti di tortura

87

Codici segreti

50

Scacchiera incompleta

50

Invenzioni futuristiche

104

Sortite casuali

94

Curiosi polinomi

66

Incisioni sulla lapide

61



# Semifinale C - Cesenatico 2017 - Stato squadre

00:00

01) Anosto-Spallanzani	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16								
02) Volta	1	2	2	2	5	6	7	8	9	10	2	12	2	13	1	16								
03) Mazzini	1	2	3	4	5	6	7	1	8	9	10	1	12	13	14	16								
04) Marinelli [F]	1	2	3	4	5	6	7	2	8	9	10	11	12	3	13	14	1	15	16					
05) Ferraris	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16								
06) Citta' di Piero	1	1	2	1	3	4	5	6	7	1	8	9	10	1	11	12	1	13	14	15	16			
07) Pascal	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3	11	12	3	13	14	2	15	16					
08) Fermi	1	2	3	4	5	6	1	7	2	8	9	10	1	11	12	13	2	14	15	16				
09) Marconi-Delpino	1	2	3	3	4	5	6	7	2	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1					
10) Corradini	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16								
11) Marconi	1	2	3	4	5	6	2	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16							
12) Galilei	1	2	1	3	4	1	5	6	2	7	4	8	9	10	1	11	12	1	13	1	14	15	16	1
13) Plinio Seniore [F]	1	2	3	4	5	2	6	7	1	8	9	10	11	12	2	13	14	15	16					
14) Rosetti	1	1	2	1	3	4	5	6	7	8	9	10	1	11	12	13	14	15	16					
15) Calini	1	2	3	4	5	6	7	1	8	9	10	2	11	12	13	14	15	16						
16) Messadaglia [F]	1	2	3	4	5	6	7	1	8	9	10	1	11	12	1	13	14	15	16					
17) Majorana	1	2	1	3	4	5	6	1	7	8	9	10	2	11	12	13	14	15	16					
18) Oberdan	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	11	12	13	14	15	16	1						
19) Einstein	1	2	3	1	4	5	6	1	7	8	9	10	1	11	12	13	14	15	16					
20) Paschini	1	2	3	4	5	2	6	7	1	8	9	10	11	12	4	13	14	15	16					
21) Fermi	1	2	3	4	5	1	6	7	8	9	10	11	12	1	13	14	15	16						
22) Alfano da Termoli [F]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16								
23) Le Filandiere	1	2	2	3	4	5	6	1	7	4	8	9	10	1	11	12	13	14	15	16				
24) Capirola	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16								
25) Da Vinci [F]	1	2	1	3	4	5	1	6	7	1	8	9	10	11	12	13	14	15	16					
26) Michelangelo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3	11	12	13	1	14	15	16						
27) Corbino	1	2	3	4	5	6	7	1	8	9	10	2	11	12	13	14	15	16						
28) Flaminio	1	2	3	4	5	6	7	1	8	9	1	10	11	12	13	14	15	16						
29) Paleocapa	1	2	2	3	4	5	6	1	7	8	9	10	4	11	12	13	1	14	2	15	16			
30) Battaglini	1	2	3	4	5	6	7	1	8	9	10	11	12	13	14	15	16							
31) Copernico	1	2	3	1	4	5	6	2	7	2	8	9	10	2	11	12	13	14	15	16				
32) Leonardo da Vinci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16								



# Semifinale D - Cesenatico 2017 - Classifica finale squadre

00:00

Leonardo, Brescia	893
Frisi, Monza	789
Golgi, Breno	670
Galilei, Perugia	600
Nomeniano, Roma	595
Don Milani, Montichiari	574
Di Savoia-Benincasa, Ancona	542
Galilei, Trento	539
502	Moro, Reggio Emilia
467	Romita, Campobasso
433	Antonietti, Iseo
431	Ulivi, Parma
385	Amedeo di Savoia, Fisticchia
381	Ribezzo, Francavilla
363	Russell-Newton, Scandicci
356	Einstein, Teramo
337	Agnesi, Merate
331	Marconi [F], Carrara
298	Grigoletti, Pordenone
269	Olivetti, Locri
267	Fermi, Nuoro
260	Peano-Pellico, Cuneo
254	Berto, Mogliano Veneto
250	Righi, Cesena
249	Galilei, Crema
199	Tassoni, Modena
174	Nievo [F], Padova
130	Righi [F], Roma
121	Cassini [F], Genova
107	Belfiore, Mantova
97	Copernico [F], Prato



L'incontro

## Semifinale D - Cesenatico 2017 - Classifica domande

00:00

Un libro enorme

34

L'armonia delle sfere

74

La giostra

90

L'inno

34

L'iscrizione

108

Addestramento

47

La migliore arma d'assedio

27

Peste nera

31

Strumenti di tortura

78

Codici segreti

74

Scacchiera incompleta

42

Invenzioni futuristiche

108

Sortite casuali

56

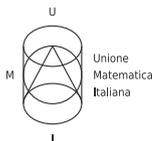
Curiosi polinomi

69

Incisioni sulla lapide

90





# XVIII GARA NAZIONALE A SQUADRE



[olimpiadi.dm.unibo.it](http://olimpiadi.dm.unibo.it)  
[www.oliforum.it](http://www.oliforum.it)  
[www.facebook.com/EGMO2018](https://www.facebook.com/EGMO2018)

Finale Nazionale - 6 Maggio 2017

## ISTRUZIONI GENERALI

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

## SCADENZE IMPORTANTI

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

Lasciate ogni compasso, o Voi ch'entrate

### 1. NEL PUNTO MEDIO DEL CAMMIN

Nel punto medio del cammin di nostra vita, meditando su un problema mi smarrii per una selva oscura. Ponderavo su un triangolo  $ABC$ ; sul lato  $AC$ , di lunghezza 400, presi un punto  $P$ . La proiezione di  $P$  sul lato  $BC$  era detta  $X$ , e  $Y$  la proiezione di  $P$  su  $AX$ . Ah! come trovar la lunghezza del lato  $AB$ , sapendo che  $AB$  era ortogonale ad  $AX$ , e che le seguenti condizioni valeano tra le lunghezze dei segmenti:  $AC = 2(PX + PY)$  e  $BX^2 - AB^2 = 2AB \cdot PY$ ?

### 2. ANIMALI FANTASTICI

Giunsi in una selva a forma di triangolo  $ABC$ , con  $AB = \sqrt{19}$ ,  $BC = 5$  e  $AC = 3$ , e innanzi a me si pararono una lupa, un leone, e una lonza: esse stabano in tre punti  $A', B', C'$  appartenenti a  $BC, AC, AB$  rispettivamente et tali che  $\frac{A'B}{A'C} = \frac{B'C}{B'A} = \frac{C'A}{C'B}$ . Notai che, detto  $G$  il baricentro di  $ABC$ ,  $A'G$  bisecava  $\widehat{B'A'C'}$ . Quanto valeva  $(A'B' + A'C')^2$ ? Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

### 3. UN POETA DEI NUMERI

All'uscita dalla selva, vidi una figura, che riconobbi immediatamente dall'abilità con cui si destreggiava con ics e ipsilon. Egli stava calcolando il numero di coppie di interi positivi  $(x, y)$  tali che  $x^2 + y^2 < 2017 < x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2$ . Ne fui stupito, giacché egli non era un personaggio del mio tempo. "Maestro Cartesio, cosa ci fate qui?", chiesi, mentre lui in un lampo terminò l'esercizio.

### 4. PER ME SI VA...

La mia guida Cartesio mi condusse di fronte alla porta degl'Inferi. Su di essa era inciso un esagono regolare  $ABCDEF$ . Ogni suo lato era diviso in 49 segmenti uguali: per esempio,  $AB$  era diviso in  $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{48}B$ , mentre  $BC$  in  $BB_1, B_1B_2, \dots, B_{48}C$ , e così via. I punti  $A_{14}, B_{14}, C_{14}, D_{14}, E_{14}, F_{14}$  erano collegati da una lingua di fuoco a formare un esagono più piccolo. Qual era il rapporto tra le aree dei due esagoni? Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

### 5. [★] IL TRAGHETTATORE

Io e Cartesio giungemmo in fronte a Carnote, il traghettatore. Ei ci venne incontro sulla sua zattera a forma di quadrilatero convesso  $ABCD$ . Essa aveva una forma peculiare: i suoi angoli erano tali che  $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} + \widehat{BAC} + \widehat{BCA}$  e  $\widehat{DCA} = 2\widehat{BAC}$ . Inoltre, si aveva  $AC = 91$ ,  $AD + CD = 169$ . Ci ordinò di sederci all'interno del triangolo  $ABC$ , piuttosto stretto, di area 2184. Qual era invece l'area totale della zattera che doveva condurci al di là del fiume Archimeronte?

### 6. CARNOT DIMONIO

"Considerate duemila dannati: mille sceglietene per la malvagia finale a squadre - che sian radunati!"	Carnot dimonio dagli occhi di bragia loro scrutando, si fe' richiedente del numero maggior che non disagia	di esser primo e tre cifre avente e divisor del numero di scelte. Rispondere tu sai correttamente?
--	--	--

"Non disagia" qui significa "Non manca".

## 7. IL PRIMO CERCCHIO

Attraversato il fiume, giungemmo al Primo Cerchio, il più grande di tutti, il  $\lim_{b \rightarrow 0}$ ; esso avea difatti la forma di un cerchio di raggio 84. Nell'attraversarlo, mentre eravamo in un punto distante 36 dal centro, la mia guida Cartesio lanciò una palla lungo una certa corda  $AB$  della circonferenza. Esso rimbalzò due volte sulle pareti, dopodiché ritornò per la prima volta nel punto iniziale ai nostri piedi. Qual era la lunghezza di tale corda  $AB$ ? *I rimbalzi avvengono in modo regolare (l'angolo di riflessione è uguale a quello di incidenza).*

## 8. LA SEQUENZA DEGLI IGNAVI

Andammo poi nel girone degl'ignavi, dov'erano coloro che sono troppo pigri per far di conto. La loro punizione era calcolare, senza posa, i termini d'una sequenza definita come segue:  $a_1 = 30$  e, per ogni  $n \geq 1$ , chiamasi  $a_{n+1}$  il minimo intero positivo maggiore di  $a_n$  tale che  $mcm(a_1, \dots, a_{n+1}) > mcm(a_1, \dots, a_n)$ . Tutto questo mentre un dimonio urlava loro nelle orecchie: "Lavorare, lavorare, lavorare...". "Sapresti dire—mi chiese Cartesio—quanto vale il più grande elemento della sequenza minore di 2405?"

## 9. IL GRAN RIFIUTO

Poiché nessuno di loro avea il coraggio di assumersi il fardello del papato, Fibonacci VII e Cardanino V decisero di giocarselo alle carte, peccando così ancora più gravemente. Essi aveano un mazzo di 52 carte, numerate da 1 a 13 con quattro copie per ogni numero. Ognuno di loro ne pescò una; qual era la probabilità che quella pescata da Fibonacci recasse un numero più alto di quella di Cardanino? *Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini*

## 10. GIUOCHI PROIBITI

'Questo è il girone dei lussuriosi', avea appena detto l'almo Cartesio, quando due anime si staccarono dal gruppo, e giunsero da noi. Le riconobbi: erano Alberto e Barbara. Protagonisti insieme di sì tanti giuochi, aveano col tempo ceduto alla passione. In vita, amavano dilettarsi con una lavagna su cui erano scritti i numeri da 1 a 100: a turno uno di loro rimpiazzava due numeri  $a$  e  $b$  con il loro minimo comune multiplo  $mcm(a, b)$  e il loro massimo comun divisore  $MCD(a, b)$ . Continuarono così fino a quando non vi erano più mosse disponibili: per ogni possibile coppia i nuovi numeri sarebbero difatti stati uguali ai precedenti. Ordinando in ordine decrescente i numeri presenti sulla lavagna alla fine del giuoco, qual era il decimo?

## 11. GALEOTTO FU IL LIBRO

Un altro dei trastulli di Alberto e Barbara era questo: nella loro biblioteca vi erano dieci volumi di poemi cavallereschi, numerati da 1 a 10. Alberto ne prendeva due casualmente, e poi dei due teneva quello con il numero maggiore e scartava l'altro. Barbara ne prendeva altri due casualmente tra i rimanenti otto, ma ella teneva quello con il numero minore e scartava quello con il numero maggiore. Sapendo che la somma dei numeri dei due volumi scartati era 11, qual era la probabilità che anche la somma dei due volumi tenuti fosse 11? *Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini*

## 12. ALGORITMI GOLOSI

"I matematici mi chiamarono Ciaccoppoli", mi disse una figura nel girone de' golosi. Elli avea ricevuto dai guelfi bianchi di Firenze 2017 cioccolatini, e altrettanti dai guelfi neri. La sua punizione, però, era di non poterli mangiare, ma di doverli disporre in triangoli sempre più grossi. Per il primo triangolo abbisognavagli un solo cioccolatino, per il secondo tre, per il terzo sei, e così via, secondo i numeri triangolari. Me ne andai prima che terminasse, mentre mi guardava sghembo. Quanti triangoli, tutti disgiunti, riuscirà costui a realizzare con i cioccolatini presenti?

## 13. L'INFERNO SPECIALE

"Questo è un girone speciale", mi disse Cartesio, "riservato a chi si macchia di colpe gravi, come semplificare addendi nelle frazioni oppure parlare al cinema." Eran presenti in questo settore solo quattordici dannati, numerati da uno a quattordici. Ogni dì, un diavolo sceglieva alcuni di essi (a volte anche nessuno di loro, se erano particolarmente fortunati), e ordinava ad ognuno dei prescelti di portare sulle spalle una quantità di macigni variabile tra uno e cinquantasei. Ogni giorno, tali quantità erano scelte in ordine crescente: un prescelto con un numero più grande ne doveva portare una quantità strettamente maggiore. In quanti modi diversi potevano essere abbinati ogni giorno dannati e macigni? *Si risponda indicando la somma dei numeri primi distinti presenti nella fattorizzazione del risultato.*

## 14. STRUTTURA DEMONIACA

Durante il nostro viaggio, Cartesio si dilungò a spiegarmi la struttura dell'inferno, tra cerchi, gironi e malebesgue. Giacché fui colto da uno svenimento, ricordo ben poco, ma la sua forma base è quella di un dodecaedro, vale a dire un solido regolare con 12 facce pentagonali. Esso ha  $V$  vertici,  $S$  spigoli, e  $D$  diagonali interne (cioè, che non giacciono su nessuna delle sue facce). Quanto vale  $D \cdot S + V$ ?

## 15. DANNATI TRIANGOLI

Nei pressi del fiume Stage, vidi un girone in cui erano racchiusi coloro che odiavano la geometria, trafitti eternamente da una successione di piccoli triangoli isosceli (ma non equilateri). Uno di loro cercava di misurarne i lati col righello, un

altro di calcolare tutto in baricentriche: ahì derelitti! Avendo tutti fatto il disegno male, però, non notarono una proprietà cruciale: l'angolo al vertice dell' $n + 1$ -esimo triangolo della successione era ampio quanto gli angoli alla base dell' $n$ -esimo triangolo, per ogni  $n$ . Indicando con  $\alpha_n$  l'ampiezza in gradi degli angoli alla base dell' $n$ -esimo triangolo, come deve scegliersi il primo di essi,  $\alpha_1$ , acciocché il numero di  $\alpha_n$  che sono interi sia massimo?

#### 16. TRA I FUOCHI ARDENTI

Tra gl'iracondi, nei pressi del fiume Stage, sedeva un'altra anima prava, colpevole in vita di non saper controllare la sua favella. Abile cultore della geometria, anche la più complessa, fu condannato a sedere in mezzo a un esagono  $ABCDEF$  di area 1000, fatto di carboni rossi e roventi. Attorno ad esso ardevano fiamme in forma di sei ellissi, tutte uguali tra loro, ognuna avente per fuochi due vertici dell'esagono ch'erano adiacenti (estremi dello stesso lato). Quella di fuochi  $A$  e  $B$  era tangente a quella di fuochi  $C$  e  $D$ ; quella di fuochi  $B$  e  $C$  era tangente a quella di fuochi  $D$  ed  $E$ , e così via, in cerchio. Tutti questi punti di tangenza formavano un poligono; qual era la sua area?

#### 17. TASSA DI SOGGIORNO

All'ingresso dell'infernale città di Hermite, i diavoli bloccarono il nostro passaggio con un problema che nessun vivente sapeva risolvere. Enunciarono:  $f(x)$  è un polinomio a coefficienti interi non costante tale che per ogni intero dispari  $n$  si ha  $2f(n)^4 = f(f(n)^2 - 458) + 1832f(n)^2$ , mentre per ogni intero pari  $m$  risulta che  $f(m) - f(1)$  è un multiplo di  $m + 1$ . Neppure Cartesio, ahimé, seppe dir loro quanto valeva  $f(457) + f(459) + f(461)$ .

#### 18. [★] FAR QUADRARE I CONTI

Nel girone successivo, riconobbi tra l'anime derelitte il mio antico maestro fiorentino, Quadretto Latino. Ei deve il nome alla sua perizia nel costruire tabelle quadrate di  $n \times n$  caselle, ognuna contenente numeri reali. Per esempio, egli amava costruire quadrati tali che, per ogni cella, la somma tra il numero presente in essa e quelli nelle celle ad essa confinanti era uguale a zero. Per quali interi  $n$  compresi tra 2 e 2017 (estremi inclusi) è costruibile una siffatta tabella con numeri non tutti nulli? Una casella confina con un'altra se esse si toccano per un vertice oppure un lato.

#### 19. OLTRE LE COLONNE

Avvolto da una duplice fiamma, riconobbi un celebre personaggio del nostro passato: Ellisseo. Egli vagò nel Mediterraneo, visitando molti dei porti conosciuti al tempo. Avea inizialmente una lista di porti numerati da 1 a 1000, scritti uno sotto l'altro in colonna. Visitato il n. 1, egli cancellò dalla lista il 3. Indi visitò il 2, e cancellò dalla lista il numero 5. Poi visitò il 4, e cancellò il 9; e proseguì così per lunghi anni, ogni volta visitando il porto con il numero più basso  $n$  rimasto sulla lista che non aveva ancora visitato e cancellando il numero  $2n + 1$  (quando esso era minore di 1000). Quando egli arrivò al termine della lista, quanti numeri rimasero scritti?

#### 20. [★] LA MENSA DELLE NORMALI

"Il conte Ugobbino", fece il vate, "si macchiò di una colpa orribile." "Pisano?" chiosai, con l'umorismo delle mie genti, ma Cartesio ignorò le mie burle. "Imprigionato dai suoi inimici, subito tracciò una retta sul muro. Poi ogni giorno lanciò una moneta; se usciva testa, egli tracciava una retta perpendicolare alla prima, se usciva croce una parallela. Avea tracciato 99 rette oltre alla prima, quando la fame lo costrinse al bieco pasto." Qual è il numero medio di regioni in cui il piano cui appartiene il muro della cella viene diviso da queste rette?

#### 21. [★] SFERE DEMONIACHE

Arrivammo infine a un edificio dalla forma peculiare, entro al quale, disse la mia guida, avremmo incontrato Lucifourier. Il cuore dell'edificio era un segmento verticale  $AB$  di lunghezza 20, tagliato in due nel suo punto medio  $M$ . Nella parte inferiore dell'edificio v'era una piramide retta a base quadrata, di lato  $10\sqrt{2}$ , di cui  $MA$  era l'altezza; nella parte superiore invece un tetraedro regolare, appoggiato su di un vertice, di cui  $MB$  era un'altezza: il punto  $M$  era un vertice comune a entrambi i solidi. Inoltre, in ognuno degli otto vertici di questa figura aveva centro una sfera di raggio 5; l'edificio era quindi formato da tutti i punti interni ad almeno uno di questi dieci solidi. Quale ne era il volume?

#### 22. [★] LA SCALA DEL DIAVOLO

Innanzi a noi si ergeva Lucifourier, enorme, orribile e puzzolente. "Ma quanto è alto?", chiesi a Cartesio? Ed egli paziente mi rispose: siano  $a, b, c, d, e, f, g, h$  le soluzioni reali di  $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1$ . La sua altezza è pari a  $a^7 + b^7 + c^7 + d^7 + e^7 + f^7 + g^7 + h^7$ . E la mia mente non poteva comprendere la magnitudine di questo numero. . .

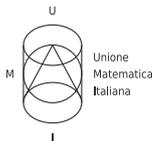
#### 23. [★] IL PRIMO TRADITORE

L'imperatore infernale Lucifourier, intrappolato nelle acque ghiacciate del Cauchy, tormentava i tre grandi traditori—Giüdel, Brunge e Kuttio—maciullandoli di problemi. Una bocca profferì: "Quante sono le terne di interi  $a, b, c \in \{0, \dots, 70\}$  tali che  $a^2 + b^2 - 2c^2$  sia multiplo di 71? Rispondi o condividi la loro sorte!". Raggelato dalla paura, dovetti chiamare in aiuto Cartesio che rispose per me. Cosa disse a Lucifourier?

#### 24. [★] LA NATURAL BORELA

"V'è un sol modo di uscire dall'inferno—disse la mia guida Cartesio—attraverso questa rete di cunicoli, che sbuca dall'altro lato della Terra", e mi mostrò una mappa su un foglio di pergamena. Su di essa era tracciato un triangolo  $ABC$ .

Sul lato  $BC$  stavansi nell'ordine 21 punti  $A_1, A_2, \dots, A_{21}$  tali che  $BA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{20}A_{21} = A_{21}C$ . Analogamente, sul lato  $CA$  v'erano in quest'ordine 21 punti  $B_1, \dots, B_{21}$ , di nuovo con  $CB_1 = B_1B_2 = \dots = B_{20}B_{21} = B_{21}A$ , e poscia sul lato  $AB$  in quest'ordine 10 punti  $C_1, \dots, C_{10}$ , con  $AC_1 = C_1C_2 = \dots = C_9C_{10} = C_{10}B$ . Eran poi tracciate tutte le rette del tipo  $AA_i$ ,  $BB_j$  e  $CC_k$  per  $i = 1, 2, \dots, 21$ ,  $j = 1, 2, \dots, 21$  e  $k = 1, 2, \dots, 10$ . Finalmente, con l'aiuto di Cartesio, riuscimmo a scoprire in quante regioni era diviso il triangolo, risolvendo un problema con la stella.



# XVIII GARA NAZIONALE A SQUADRE

Finale Nazionale - Soluzioni - 6 Maggio  
2017



[olimpiadi.dm.unibo.it](http://olimpiadi.dm.unibo.it)  
[www.oliforum.it](http://www.oliforum.it)  
[www.facebook.com/EGMO2018](https://www.facebook.com/EGMO2018)

Nr.	Problema	Soluzione
1	Nel punto medio del cammin	0400
2	Animali fantastici	0389
3	Un poeta dei numeri	0085
4	Per me si va. . .	0088
5	[*]Il traghettatore	8424
6	Carnot Dimonio	0661
7	Il Primo Cerchio	0158
8	La sequenza degli ignavi	2401
9	Il gran rifiuto	0025
10	Giocchi proibiti	2520
11	Galeotto fu il libro	0006
12	Algoritmi golosi	0027
13	L'inferno speciale	0316
14	Struttura demoniaca	3020
15	Dannati triangoli	0028
16	Tra i fuochi ardenti	0333
17	Tassa di soggiorno	5518
18	[*]Far quadrare i conti	0672
19	Oltre le colonne	0667
20	[*]La mensa delle normali	2576
21	[*]8fere demoniache	4810
22	[*]La Scala del Diavolo	0304
23	[*]Il primo traditore	5041
24	[*]La natural Borela	0894



# Finale Nazionale - Cesenatico 2017 - Classifica finale squadre

00:00

Leonardo, Brescia 1113

921	Marconi, Carrara
897	Landi, Velletri
849	Ferraris, Torino
838	Corradini, Thiene
823	Fermi, Cantu'
800	Nievo, Padova
785	Alessi, Perugia
753	Leopardi, Recanati
717	Frisi, Monza
678	Capirola, Leno
667	Curie, Pinerolo
652	Copernico, Brescia
597	Tron, Schio
593	Ariosto-Spallanzani, Reggio Emilia
556	Golgi, Breno
552	Volta, Milano
549	Pellati, Nizza Monferrato
543	Galilei, Perugia
530	Galilei, Catania
511	Leonardo da Vinci, Firenze
498	Battaglini, Taranto
493	Nomentano, Roma
476	Oberdan, Trieste
466	Calini, Brescia
463	Galilei, Trento
446	Cassini, Genova
445	Copernico, Udine
406	Di Savoia-Benincasa, Ancona
322	Einstein, Palermo
308	Da Vinci, Treviso
223	Don Milani, Montichiari

Fazekas, Budapest 1127

Skoda, Prerov 767

Ruthin School, Ruthin 722

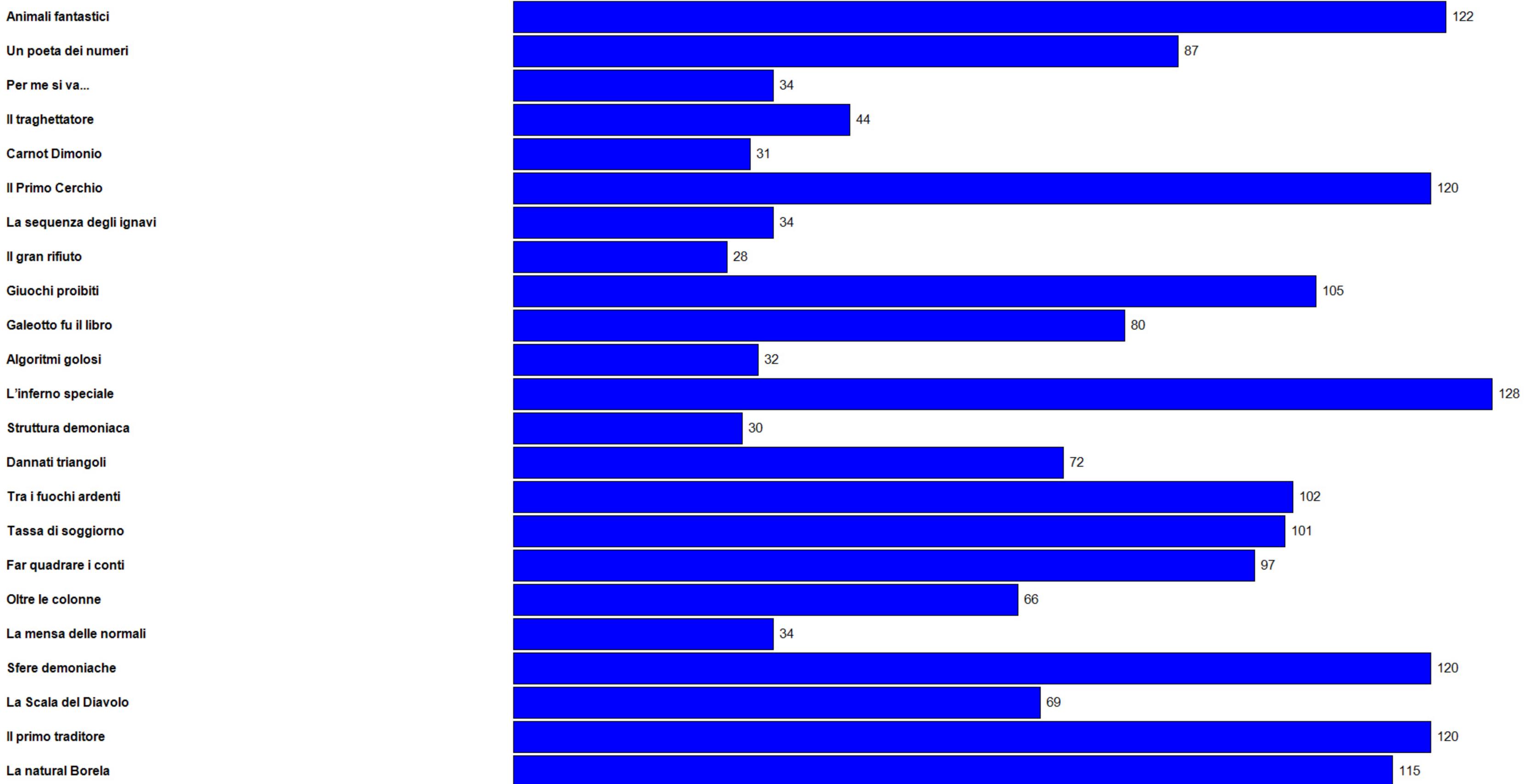
632 Vianu, Bucarest



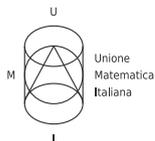
Nel punto medio del cammin

# Finale Nazionale - Cesenatico 2017 - Classifica domande

00:00







# XVIII GARA NAZIONALE A SQUADRE

Credits - 5 Maggio 2017



[olimpiadi.dm.unibo.it](http://olimpiadi.dm.unibo.it)  
[www.oliforum.it](http://www.oliforum.it)  
[www.facebook.com/EGM02018](https://www.facebook.com/EGM02018)

## RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano per il loro prezioso aiuto nella selezione dei problemi, la preparazione e il controllo dei testi: Daniele Ahmed, Edoardo Annunziata, Flavio Ascari, Francesco Ballini, Giovanni Barbarino, Filippo Baroni, Mara Barucco, Lorenzo Benedini, Lorenzo Beretta, Alessio Bernazzi, Claudio Filippo Bianchi, Luca Bruni, Fabio Caceffo, Luca Capizzi, Alessandra Caraceni, Camilla Casamento Tumeo, Michele Caselli, Federica Cecchetto, Sebastiano Cominelli, Andrea Dalzotto, Alessandro D'Andrea, Flavio De Vincenti, Giacomo Ferraro, Fabio Ferri, Luca Francone, Giada Franz, Lorenzo Furio, Andrea Gallese, Davide Gori, Alessandro Iraci, Kirill Kuzmin, Paolo Leonetti, Luca Macchiaroli, Marcello Mamino, Fabio Marconi, Andrea Marino, Andrea Martin, Marco Miani, Giona Micossi, Pasquale Miglionico, Matteo Migliorini, Andrea Monti, Nicola Ottolini, Andrea Parma, Simone Pelizzola, Paolo Prenassi, Dario Rancati, Giuseppe Re, Vittoria Ricciuti, Giuseppe Romanazzi, Pino Rosolini, Matteo Rossi, Francesco Sala, Giacomo Santato, Edoardo Siniscalco, Gianmaria Tomaselli, Giulia Trevisan, Marco Trevisiol, Emanuele Tron, Davide Vecchi, Silvia Vistoli, Damiano Yoeme Bussagli, Riccardo Zanotto, Matteo Zemello.  
(e si chiede perdono a Dante Alighieri!)