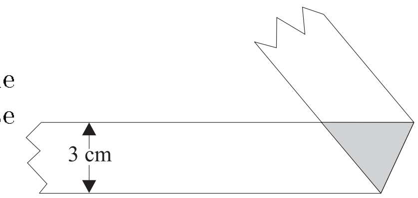
Progetto Olimpiadi di Matematica 1997
XIII GARA NAZIONALE di MATEMATICA

Cesenatico, 2 maggio 1997

1. Una striscia di carta con bordi paralleli distanti 3 cm viene piegata in modo che una parte di essa risulti parzialmente sovrapposta alla parte rimanente (vedi figura).



   Qual è l'area minima della zona ombreggiata?

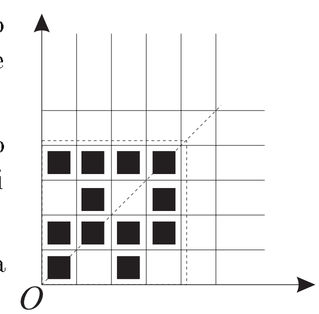
2. Sia f una funzione reale di variabile reale che verifica le condizioni

   (i) $f(10+x) = f(10-x)$
   (ii) $f(20+x) = -f(20-x)$

   per ogni valore reale di x. Si dimostri che f è **dispari** e **periodica**.

   Si ricorda che f si dice **dispari** se $f(-x) = -f(x)$ per ogni x;
   f si dice **periodica** se esiste $T > 0$ tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni x.

3. Si consideri il quadrante infinito in figura, dove tutti i quadratini hanno lato 1. È possibile colorare di nero alcuni dei quadratini in modo che siano soddisfatte entrambe le seguenti proprietà?



   - Per ogni numero naturale n, il quadrato con vertice in O e di lato n (con i lati paralleli agli assi) ha un numero di quadratini neri maggiore del numero di quadratini bianchi.
   - Su ogni diagonale infinita di quadratini parallela a quella mostrata in figura, ci sono al più un numero finito di quadratini neri.

4. Sia $ABCD$ un tetraedro generico di cui si conosce la lunghezza a dello spigolo AB e l'area S della proiezione del tetraedro su un piano perpendicolare alla retta per A e B.

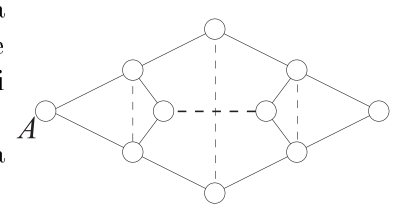
   Determinare il volume del tetraedro.

5. Sia X l'insieme dei numeri naturali che in base dieci **non** si scrivono con una sola cifra ripetuta più volte. Per ogni $n \in X$ definiamo A_n come l'insieme dei numeri ottenuti permutando in tutti i modi possibili le cifre di n e sia d_n il massimo comune divisore di tutti i numeri di A_n. Ad esempio, se $n = 1120$,

$$A_{1120} = \{112, 121, 211, 1012, 1021, 1102, 1120, 1201, 1210, 2011, 2101, 2110\}$$

   e $d_{1120} = 1$ (112 e 121 sono primi fra loro). Si determini il massimo valore possibile di d_n.

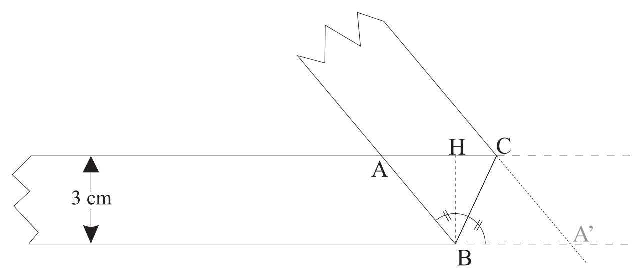
6. Un commesso viaggiatore deve organizzare un viaggio che gli permetta di visitare tutte le città rappresentate nello schema, partendo da A e tornando ad A. I tratti continui rappresentano i collegamenti ferroviari tra le varie città, e quelli tratteggiati i collegamenti aerei.
   Il biglietto ferroviario da una città ad una direttamente collegata costa 150 000 lire, mentre quello aereo costa 250 000 lire.
   Qual è la minima spesa che il commesso viaggiatore deve sostenere?



Progetto Olimpiadi di Matematica 1997
XIII GARA NAZIONALE di MATEMATICA
SOLUZIONI

Cesenatico, 2 maggio 1997

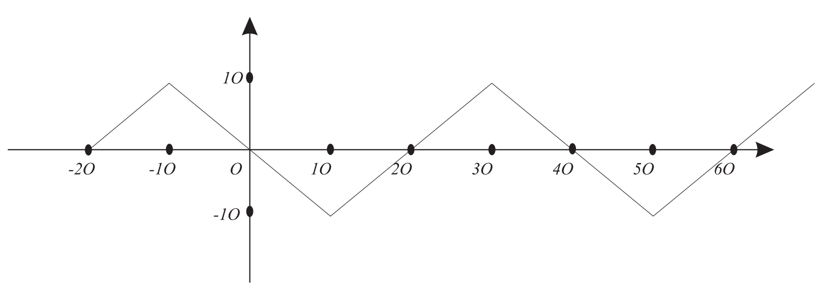
1. Gli angoli $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ sono alterni interni e quindi uguali, pertanto il triangolo ABC è isoscele e $AB = AC$.



Ne segue che l'area di ABC vale $\frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AB \cdot BH$.
Siccome BH è costante e vale 3 cm, il minimo dell'area di ABC si ottiene quando A coincide con H. In tal caso il triangolo ABC è rettangolo in A e l'area vale $4,5$ cm^2.

2. Si ha: $f(20+x) = f(10+(10+x)) = f(10-(10+x)) = f(-x)$ dalla *(i)*
$f(20+x) = -f(20-x) = -f(x)$ dalla *(ii)* e dalla precedente
da cui $f(-x) = -f(x)$ per ogni x e quindi f è **dispari.**
Inoltre $f(40+x) = f(20+(20+x)) = -f(20-(20+x)) = -f(-x) = f(x)$ e quindi essendo $f(40+x) = f(x)$ se ne deduce che f è **periodica**.

Il seguente grafico riporta un esempio di una funzione siffatta.

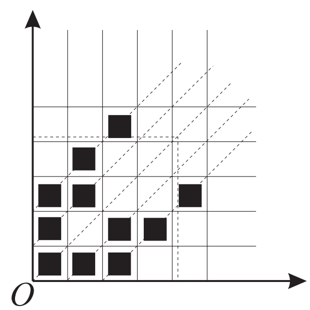


3. Sì, è possibile. Per esempio, si colorino di nero:

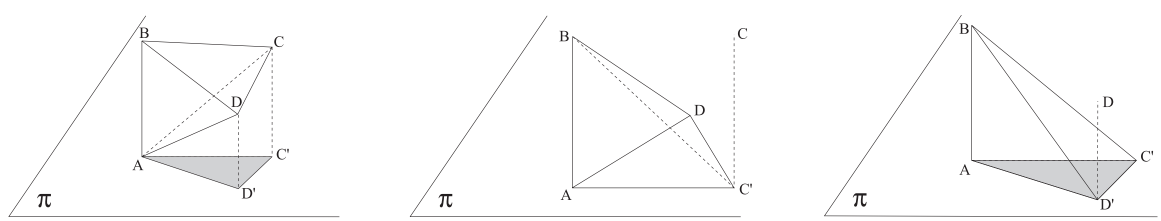
   - il primo quadratino avente vertice in O;
   - i primi 2 quadratini sulle due diagonali adiacenti alla diagonale centrale;
   - i primi 3 quadratini sulle due diagonali adiacenti alle precedenti, e così via.

   È chiaro che ogni diagonale a 45° ha un numero finito di quadratini neri.
   Inoltre il numero dei quadratini neri in un quadrato di lato n con vertice nell'origine si può contare come segue:

   - se $n = 2k$ è pari, il numero è
   $1 + 2(2 + 3 + \ldots + k - 1 + k + k + k - 1 + \ldots + 2 + 1) = 2k^2 + 2k - 1 > 2k^2 = \frac{1}{2}n^2$
   - se $n = 2k + 1$ è dispari, il numero è:
   $1 + 2(2 + 3 + \ldots + k + k + 1 + k + \ldots + 2 + 1) = 2k^2 + 4k + 1 > 2k^2 + 2k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n^2$.



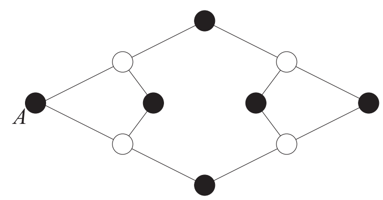
4. Sia π il piano passante per A perpendicolare allo spigolo AB e siano C', D' le proiezioni di C e D su π. La proiezione del tetraedro $ABCD$ su π è il triangolo $AC'D'$.



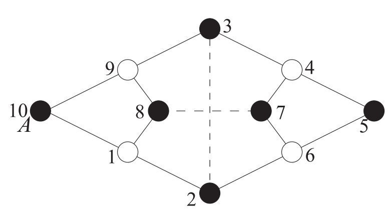
   Il volume del tetraedro $ABCD$ è uguale a quello del tetraedro $ABC'D$ in quanto i due tetraedri hanno la stessa base ABD e i vertici C, C' stanno su una parallela al piano di base. Allo stesso modo si vede che i tetraedri $ABC'D$ e $ABC'D'$ hanno lo stesso volume, avendo la stessa base ABC' e vertici D, D' su una parallela al piano di base. Ne segue che il volume di $ABCD$ è uguale a quello di $ABC'D'$; siccome AB è perpendicolare a π tale volume è dato da $\frac{1}{3}aS$.

5. Il massimo comun divisore di due numeri divide anche la loro differenza. Se A e B sono due cifre distinte di n con $A > B$, i due numeri $XXXAB$ e $XXXBA$ sono in A_n (XXX rappresenta una successione qualsiasi delle altre cifre di n). La loro differenza vale $9(A - B)$.
   Il valore massimo di $A - B$ è 9, che si raggiunge solo se $A = 9$ e $B = 0$. Questo dimostra che d_n è minore o uguale a 81. Vediamo ora che esiste un intero N tale che $d_N = 81$. Un tale N deve essere formato solo da cifre 9 e 0 (altrimenti si trovano A e B come sopra, con $A - B < 9$, mentre $d_N \leq 9(A - B) < 81$) e deve essere esso stesso multiplo di 81. Equivalentemente $N/9$ deve essere formato solo da cifre 1 e 0 e deve essere multiplo di 9. Per il criterio di divisibilità per 9, la somma delle cifre di $N/9$ deve essere multipla di 9 e quindi $N/9$ deve possedere almeno 9 cifre uguali a 1.
   Il più piccolo intero in X con queste proprietà è 1 011 111 111, quindi N è almeno 9 099 999 999. D'altra parte se $N = 9\,099\,999\,999$, si verifica facilmente che tutti i numeri di A_N sono divisibili per 81 e quindi $d_N = 81$.

6. Vediamo anzitutto che non è possibile passare una e una sola volta per tutte le città utilizzando solamente i collegamenti ferroviari.
   Osserviamo infatti la seguente figura, che evidenzia solamente i tratti ferroviari e che divide le città in *"bianche"* e *"nere"*.



   Poiché ogni tratto collega due città di diverso colore, non esiste alcun percorso che passi una, ed una sola, volta per tutte le città, partendo da A e tornando ad A.
   Un tale percorso dovrebbe infatti passare per un numero uguale di città bianche e nere secondo lo schema $NBNBNBNBNBN$ (il primo e l'ultimo N rappresentano A), mentre nella figura compaiono sei città nere e quattro bianche.
   Non è neppure possibile effettuare il viaggio con solo undici tratti ferroviari; partendo da A, è infatti possibile arrivare solamente, sempre per via dell'alternanza dei colori, ad una città bianca. Ciò significa allora che per effettuare il viaggio solamente per ferrovia occorre spendere almeno 1 800 000 lire.
   Non è possibile effettuare il viaggio passando una ed una sola volta per ogni città con un solo tratto per aeroplano. Poiché infatti i tratti aerei collegano solo città di uguale colore, un tale percorso non può permettere di ritornare ad A, ma permetterebbe solamente di arrivare ad una città bianca.
   È invece possibile il seguente percorso, con due tratti per via aerea:



   Tale percorso presenta 8 tratti ferroviari e 2 aerei, per un totale di 1 700 000 lire, che è la minima spesa possibile.