Progetto Olimpiadi di Matematica 1998
GARA NAZIONALE di MATEMATICA

Cesenatico, 8 maggio 1998

1. Se x è un numero reale positivo si denoti con $[x]$ la parte intera di x, cioè il massimo intero $n \leq x$. Si calcoli la somma $\displaystyle\sum_{n=1}^{1\,000\,000} [\sqrt{n}] = \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \ldots + \left[\sqrt{999\,999}\right] + \left[\sqrt{1\,000\,000}\right]$.

   [Lo studente può utilizzare, se crede, la seguente formula: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, la cui dimostrazione non è richiesta.]

2. Si dimostri che in ogni poliedro convesso ci sono almeno due facce con lo stesso numero di lati.

3. Alberto vuole organizzare per questa sera una partita di poker.

   Egli sa che Bruno e Barbara si recano insieme in palestra una sera su tre, e che Carla, Corrado, Dario e Davide sono impegnati una sera su due (ma non necessariamente negli stessi giorni).

   Inoltre, sa che Dario non vuole giocare con Davide poiché questi gli ha portato via la ragazza.

   Poiché per giocare a poker occorrono almeno quattro persone (compreso Alberto), qual è la probabilità che stasera si giochi?

4. Sia $ABCD$ un trapezio con base maggiore AB tale che le diagonali AC e BD siano perpendicolari. Sia O il centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC e sia E il punto di intersezione tra la retta OB e la retta CD. Dimostrare che

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE}.$$

5. Siano a_1, a_2, a_3, a_4 quattro numeri interi distinti e sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che

$$P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = P(a_4) = 1. \qquad (*)$$

   (i) Dimostrare che non esiste nessun numero intero n tale che $P(n) = 12$.

   (ii) Esistono un polinomio $P(x)$ che soddisfa la condizione $(*)$ ed un intero n tale che $P(n) = 1998$?

6. Sia f una funzione definita nell'insieme degli interi positivi a valori interi positivi.
   Diciamo che:

   - f è *crescente* se $n < m$ implica $f(n) < f(m)$
   - f è *moltiplicativa* se $\mathrm{MCD}(m,n) = 1$ implica $f(nm) = f(n) \cdot f(m)$
   - f è *completamente moltiplicativa* se $f(nm) = f(n) \cdot f(m)$ per ogni n, m.

   (i) Si dimostri che se f è crescente allora $f(n) \geq n$ per ogni n.

   (ii) Si dimostri che se f è crescente, completamente moltiplicativa e $f(2) = 2$ allora $f(n) = n$ per ogni n.

   (iii) L'affermazione (ii) resta vera se si elimina l'avverbio *completamente*?

Progetto Olimpiadi di Matematica 1998
GARA NAZIONALE di MATEMATICA
SOLUZIONI

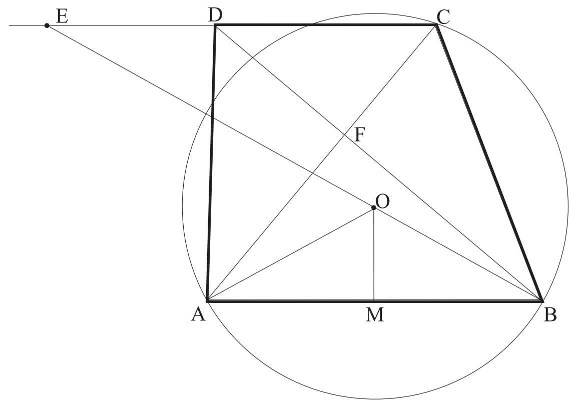
Cesenatico, 8 maggio 1998

1. Si ha $[\sqrt{n}] = k$ se e solo se $k^2 \leq n < (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$, ossia per $n = k^2 + j$ con $0 \leq j \leq 2k$, ovvero per $2k+1$ valori di j
   Pertanto,
   $$\sum_{n=1}^{K^2-1} [\sqrt{n}] = \sum_{k=1}^{K-1} k(2k+1) =$$
   $$= 2\sum_{k=1}^{K-1} k^2 + \sum_{k=1}^{K-1} k = \frac{(K-1)K(2K-1)}{3} + \frac{K(K-1)}{2} = \frac{(K-1)K(4K+1)}{6} \qquad (*)$$
   La somma richiesta si ottiene dall'espressione $(*)$ ponendo $K = 1000$ ed aggiungendo $1000 = \sqrt{1\,000\,000}$, che non era stato contato ancora: dunque si ottiene $500 \cdot (333 \cdot 4001 + 2)$.

2. Sia n il numero di facce del poliedro. Poiché lati distinti di una faccia confinano con facce distinte, ciascuna faccia può avere un numero di lati compreso fra 3 e $(n-1)$. Ne segue che vi sono almeno due facce con lo stesso numero di lati.

3. Vi sono $\frac{2}{3}$ di probabilità che Bruno e Barbara possano giocare; in tal caso basta che sia disponibile anche uno solo degli altri amici. Che uno fissato degli amici non possa giocare è un evento di probabilità $\frac{1}{2}$, e dunque che nessuno dei quattro possa giocare è un evento di probabilità $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$. La probabilità che almeno uno di loro possa giocare è la probabilità complementare, che vale dunque $\frac{15}{16}$.
   La probabilità che Bruno e Barbara non si rechino in palestra e che si possa giocare è quindi uguale a $\frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{5}{8}$.
   Nel caso invece che Bruno e Barbara si rechino in palestra (il quale evento ha probabilità $\frac{1}{3}$), occorre assolutamente che Carla e Corrado siano disponibili, e che almeno Dario o Davide sia disponibile. La probabilità che Bruno e Barbara si rechino in palestra e che si possa giocare è dunque uguale a $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{16}$.
   La probabilità totale di poter giocare è allora $\frac{5}{8} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$.

4. Sia F l'intersezione delle due diagonali del trapezio e sia M il punto medio di AB. Poiché il triangolo AOB è isoscele e OM ne è la mediana rispetto alla base, i triangoli AOM e BOM sono uguali e, in particolare, $\widehat{AOM} = \widehat{BOM} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$. Inoltre, considerando la circonferenza circoscritta al triangolo ABC, gli angoli $\widehat{AOB}$ e $\widehat{ACB}$ sono rispettivamente angolo al centro e angolo alla circonferenza insistenti sullo stesso arco AB, per cui $\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{ACB}$ e quindi $\widehat{BOM} = \widehat{ACB}$.



Ne segue che i triangoli OBM e CBF, che sono rettangoli, hanno un angolo acuto uguale e quindi anche l'altro angolo acuto è uguale, cioè $\widehat{ABE} = \widehat{DBC}$. Inoltre gli angoli $\widehat{ABE}$ e $\widehat{BEC}$ sono uguali perché alterni interni e quindi si ha anche $\widehat{DBC} = \widehat{BEC}$.

Infine i triangoli BCD e ECB sono simili, perché hanno l'angolo in C in comune e un altro angolo uguale. Si ha allora $\overline{BC} : \overline{CD} = \overline{EC} : \overline{CB}$, ossia $\overline{BC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE}$.

5. Consideriamo il polinomio $Q(x) = P(x) - 1$. La condizione $(*)$ assicura che $Q(a_1) = Q(a_2) = Q(a_3) = Q(a_4) = 0$ e, per il teorema di Ruffini, $Q(x)$ è divisibile per ciascuno dei fattori $(x - a_i)$ $(1 \leq i \leq 4)$. Poiché gli a_i sono distinti, $Q(x)$ è divisibile per il loro prodotto, cioè

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)R(x)$$

per qualche polinomio a coefficienti interi $R(x)$. Se, per assurdo, si avesse $P(n) = 12$, si avrebbe $Q(n) = 11$, cioè

$$11 = (n - a_1)(n - a_2)(n - a_3)(n - a_4)R(n)$$

e quindi 11, che è un numero primo, si scriverebbe come prodotto di almeno 4 numeri interi distinti. Ma questo è impossibile, perché gli unici interi relativi che sono divisori di 11 sono $\pm1, \pm11$ e di essi al piú tre possono essere inseriti in un prodotto il cui risultato è 11 ($+11$ e -11 non possono essere inseriti contemporaneamente).

Lo stesso ragionamento dice anche che non esistono un polinomio $P(x)$ che soddisfa la condizione $(*)$ ed un numero intero n tale che $P(n) = 1998$, perché si verifica che $1997 = 1998 - 1$ è un numero primo.

6. (i) Se m è il minimo intero positivo tale che $f(m) < m$, gli $m-1$ numeri che precedono m devono avere tutti immagine minore di $f(m)$ e dunque non possono essere tutti diversi perché si hanno a disposizione al più $m-2$ valori, assurdo.

(ii) Se m è il minimo intero positivo tale che $f(m) > m$ ed è pari, allora $f(m) = 2f\left(\frac{m}{2}\right) = 2\frac{m}{2} = m$, assurdo.

Se m è dispari, allora $f(m+1) = 2f\left(\frac{m+1}{2}\right) = m+1$ poiché $\frac{m+1}{2} < m$, in quanto $m > 2$ e quindi $f(m) < m+1$, assurdo.

(iii) Sì. Infatti se m è il minimo intero positivo tale che $f(m) < m$ ed è pari allora si procede come prima se $\frac{m}{2}$ è dispari, e si passa a $f(m+2) = 2f\left(\frac{m+2}{2}\right) = m+2$ se $\frac{m}{2}$ è pari (si osservi che $\frac{m+2}{2} < m$ perché $m > 2$).

Se m è dispari di nuovo si procede come prima se $\frac{m+1}{2}$ è dispari, altrimenti si passa a $f(m+3) = 2f\left(\frac{m+3}{2}\right) = m+3$ perché $\frac{m+3}{2} < m$, ovvia purché sia $m > 3$. Resta dunque da escludere che m sia 3, cioè occorre dimostrare che $f(3) = 3$. A tal fine sia d un numero dispari, non divisibile per 3 e tale che $\frac{3d+1}{2}$ sia dispari (ad esempio $d = 7$ va bene). Allora si ha:

$$f\left(\frac{3d+1}{2}\right) < f(2d) = 2f(d)$$

$$f(3d+1) = 2f\left(\frac{3d+1}{2}\right) > f(3d) = f(3)f(d)$$

da cui $2 > \frac{f(3)}{2}$ e quindi $f(3) < 4$.

Osserviamo che in maniera più diretta si può dimostrare che $f(3) = 3$ nel modo seguente.

Poniamo $f(3) = x$.

Per la crescenza si ha $f(5) \geq x+2$ e, per la moltiplicatività, $f(15) \geq x(x+2) = x^2+2x$. Usando alternativamente la moltiplicatività e la crescenza si ha anche:

$$\begin{aligned}
&f(6) = 2x \\
&f(5) \leq 2x-1 \\
&f(10) \leq 4x-2 \\
&f(9) \leq 4x-3 \\
&f(18) \leq 8x-6
\end{aligned}$$

,

Nuovamente per la crescenza, si ha $f(15) + 3 \leq f(18)$, da cui

$$x^2 + 2x + 3 \leq 8x - 6$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \leq 0$$

e quindi $x = 3$.