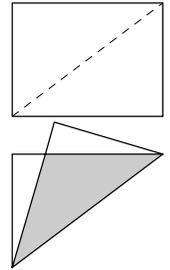


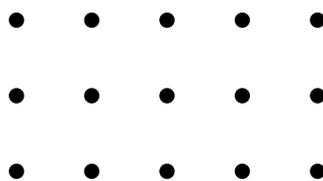
XV GARA NAZIONALE DI MATEMATICA

Cesenatico, 7 maggio 1999

- 1) Dato un foglio rettangolare di lati a e b , con $a > b$, determinare l'area del triangolo che risulta dalla sovrapposizione dei due lembi che si ottengono piegando il foglio lungo una diagonale (il triangolo colorato in grigio nella figura).



- 2) Diciamo che un numero naturale è *equilibrato* se si scrive con tante cifre quanti sono i suoi divisori primi distinti (per esempio, 15 è equilibrato, mentre 49 non lo è). Dimostrare che c'è solo un numero finito di numeri equilibrati.
- 3) Siano $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ tre circonferenze di raggi rispettivamente r, r_1, r_2 con $0 < r_1 < r_2 < r$. Le circonferenze γ_1 e γ_2 sono tangenti internamente a γ , in due punti distinti A e B e si intersecano fra loro in due punti distinti. Dimostrare che il segmento AB passa per uno dei punti di intersezione fra γ_1 e γ_2 se e solo se $r_1 + r_2 = r$.
- 4) Alberto e Barbara fanno il seguente gioco. Su di un tavolo ci sono 1999 cerini: a turno ogni giocatore deve togliere dal tavolo un numero di cerini a sua scelta, purché maggiore o uguale ad uno, e minore o uguale alla metà del numero dei cerini che in quel momento sono sul tavolo. Il giocatore che lascia sul tavolo un solo cerino perde. Barbara è la prima a giocare. Determinare per quale dei due giocatori esiste una strategia vincente e descrivere tale strategia.
- 5) Su un lago c'è un villaggio di capanne poste su palafitte nei nodi di un reticolo rettangolare $m \times n$ (vedi esempio in figura). Dalla piattaforma di ogni capanna partono esattamente p ponti, che la collegano ad una o più delle capanne contigue (rispetto al reticolo, quindi non in diagonale). Per quali valori interi positivi m, n e p è possibile collocare i ponti in modo che da ogni capanna si raggiunga qualsiasi altra capanna? (Ovviamente tra due capanne contigue si possono collocare più ponti).



Esempio di reticolo 3×5

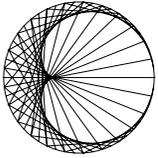
- 6) (a) Determinare tutte le coppie (x, k) di interi positivi che soddisfano l'equazione

$$3^k - 1 = x^3.$$

- (b) Dimostrare che se n è un intero maggiore di 1 e diverso da 3 non esistono coppie (x, k) di interi positivi che soddisfano l'equazione

$$3^k - 1 = x^n.$$

SI RINGRAZIANO PER LA COLLABORAZIONE
AGIP PETROLI, GESTURIST, COMUNE DI CESENATICO

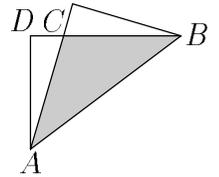


XV GARA NAZIONALE DI MATEMATICA

Cesenatico, 7 maggio 1999

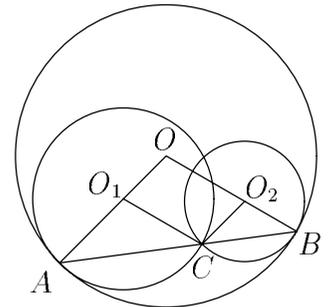
Soluzioni

- 1) Il triangolo ABC è isoscele (gli angoli \widehat{BAC} e \widehat{ABC} corrispondono a due angoli alterni interni nel rettangolo diviso da una diagonale) e la sua area è $S = CB \cdot AD/2$ (AD è l'altezza relativa a CB). Posto $DB = a$, $AD = b$, $CB = AC = x$ e $DC = a - x$, il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ACD fornisce $b^2 + (a - x)^2 = x^2$ da cui $x = \frac{a^2 + b^2}{2a}$ ed infine $S = \frac{b(a^2 + b^2)}{4a}$.

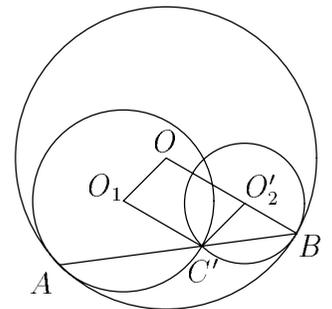


- 2) Non esistono numeri equilibrati di c cifre se $c > 100$. Infatti un tale numero sarebbe prodotto di c numeri primi, almeno metà dei quali maggiori di 100. Quindi il numero sarebbe maggiore di $100^{c/2} = 10^c$, il che è assurdo. In effetti il più grande numero equilibrato ha esattamente dieci cifre, dato che $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 < 10^{10}$, mentre $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 > 10^{11}$.

- 3) Supponiamo dapprima che il segmento AB passi per uno dei punti di intersezione fra γ_1 e γ_2 , e sia C tale punto. Siano inoltre O, O_1, O_2 rispettivamente i centri delle circonferenze $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$. I triangoli OAB, O_1AC e O_2BC sono isosceli e sono simili (per esempio OAB e O_1AC hanno un angolo alla base in comune). Pertanto i lati opposti del quadrilatero OO_1CO_2 sono paralleli e tale quadrilatero è un parallelogramma. Dunque $r = OA = OO_1 + O_1A = O_2C + O_1A = r_2 + r_1$.



Viceversa, supponiamo $r = r_1 + r_2$. Si costruisca il parallelogramma $OO_1C'O_2$ i cui vertici C' e O_2' stanno sui segmenti AB e OB (è ovvio che ciò si può fare in modo unico). Dalla similitudine di $O_1AC', O_2C'B$ e OAB si ha che $O_1C' = O_1A = r_1$, da cui segue che C' sta sulla circonferenza γ_1 , e anche $O_2'B = O_2C' = OO_1 = OA - O_1A = r - r_1 = r_2$, da cui segue che $O_2' = O_2$ e che C' sta sulla circonferenza γ_2 .



- 4) La strategia vincente si può determinare procedendo a ritroso. Chi lascia un solo cerino sul tavolo perde. Chi ne lascia due vince, perché costringe l'altro giocatore a lasciarne uno solo. Chi ne lascia 3 o 4 perde, perché alla mossa successiva l'altro potrà lasciarne due. Chi ne lascia 5 invece vince, perché costringe l'altro a lasciarne 3 o 4, che abbiamo visto essere mosse perdenti. Analogamente si vede che lasciarne 6, 7, 8, 9 o 10 è una mossa perdente (permette all'altro di lasciarne 5), mentre lasciarne 11 è vincente.

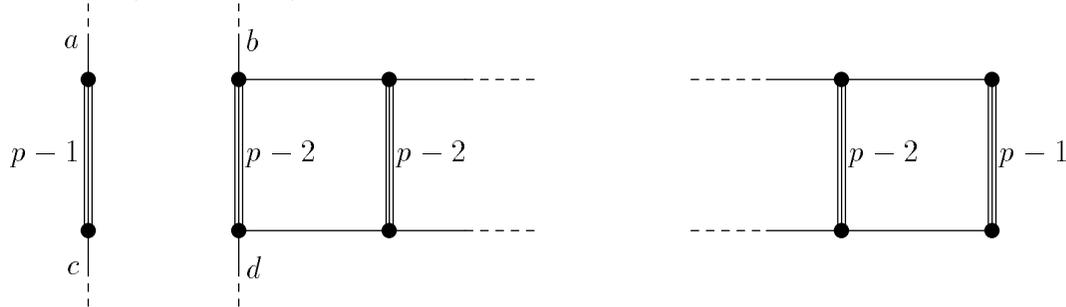
Questo ragionamento si può ripetere all'infinito: se lasciare k cerini è una mossa vincente, allora lasciarne un numero compreso tra $k + 1$ e $2k$ (estremi inclusi) è perdente, mentre lasciarne $2k + 1$ è vincente. In conclusione i "numeri vincenti" si possono facilmente determinare partendo da due e sfruttando per ricorrenza il fatto appena osservato che se k è vincente, anche $2k + 1$ è vincente. I "numeri vincenti" minori di 1999 sono pertanto: 2, 5, 11, 23, 47, 95, 191, 383, 767, 1535. Barbara quindi può vincere seguendo questa strategia: alla prima mossa lascia sul tavolo 1535 cerini, la seconda volta che tocca a lei ne lascia 767, la terza volta 383, e così via. Procedendo in questo modo la decima volta che tocca a lei ne lascerà sul tavolo 2, e alla mossa successiva Alberto perderà.

- 5) Se $m = 1$ o $n = 1$ una capanna posta in un'estremità ha una sola capanna contigua, che quindi non può essere collegata a nessun'altra capanna (i p ponti che partono dalla prima capanna devono necessariamente raggiungere la capanna contigua). Quindi si hanno solo le possibilità $(m, n) = (1, 2)$ o $(m, n) = (2, 1)$ e p qualsiasi.

Se m ed n sono entrambi maggiori di 1, non si può avere $p = 1$, in quanto da una capanna se ne potrebbe raggiungere solo un'altra.

Consideriamo ora il caso in cui m, n e p sono tutti maggiori di 1. Dimostriamo che è possibile collocare i ponti se e solo se $m \cdot n$ è pari (e p può essere qualunque). Colorando di bianco e di nero le capanne come in un'ordinaria scacchiera, si ha che ogni ponte ha un'estremità bianca e una nera. Se $m \cdot n$ è dispari, cioè m ed n sono entrambi dispari, non è possibile far partire lo stesso numero di ponti da tutte le capanne, in quanto il numero delle capanne bianche differisce di uno (in più o in meno) da quello delle capanne nere.

D'altra parte se (ad esempio) m è pari, si possono formare degli isolati $2 \times n$ nel modo seguente:



I quattro semiponti a, b, c, d servono per collegare fra loro gli isolati (ovviamente nel caso degli isolati più esterni due di essi sono saldati fra loro a formare un unico ponte).

- 6) (a) Riscriviamo l'equazione nella forma

$$3^k = x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Poiché gli unici divisori di una potenza di 3 sono a loro volta potenze di 3, ogni soluzione deve soddisfare il sistema

$$\begin{cases} x + 1 = 3^a \\ x^2 - x + 1 = 3^b \end{cases}$$

con a e b interi positivi tali che $a + b = k$. Se $a = 1$, si ottiene $x = 2, b = 1$ e $(x, k) = (2, 2)$ è una soluzione. Se $a > 1$, sostituendo $x = 3^a - 1$ nella seconda equazione si ottiene

$$3^{2a} - 3^{a+1} + 3 = 3(3^{2a-1} - 3^a + 1) = 3^b$$

che è impossibile perché $3^{2a-1} - 3^a + 1$ è maggiore di 1 e non è divisibile per 3. Quindi c'è un'unica soluzione, $(x, k) = (2, 2)$.

(b) Supponiamo dapprima che n sia un numero dispari. Possiamo scrivere l'equazione nella forma

$$3^k = x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1)$$

e, analogamente a prima, un'eventuale soluzione dovrebbe soddisfare il sistema

$$\begin{cases} x + 1 = 3^a \\ x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1 = 3^b \end{cases}$$

con a e b interi positivi tali che $a + b = k$. Dividendo il polinomio $x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1$ per $x + 1$ si ottiene

$$x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1 = q(x)(x + 1) + r$$

e, ponendo $x = -1$, si ottiene $r = n$. Quindi il massimo comune divisore fra $x + 1$ e $x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1$, che è una potenza di 3 con esponente positivo, deve dividere anche n , e quindi in particolare 3 deve essere un divisore di n . Ponendo $n = 3m, x^m = y$, la nostra equazione diventa

$$3^k - 1 = y^3$$

Dal caso (a) sappiamo che l'unica soluzione è $y = 2, k = 2$. Ma $x^m = 2$ non ha chiaramente soluzioni intere per $m > 1$.

Supponiamo infine $n = 2m$ pari, e, ponendo $x^m = y$, consideriamo l'equazione

$$3^k = x^{2m} + 1 = y^2 + 1$$

Considerando tutti i possibili resti della divisione di y per 3, e cioè i casi $y = 3z, 3z + 1, 3z - 1$, si vede che $y^2 + 1$ non è mai divisibile per 3, e quindi non ci sono soluzioni.