# XVI GARA NAZIONALE DI MATEMATICA

Cesenatico, 5 maggio 2000

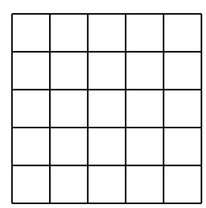
1. Diciamo che tre numeri dispari $a < b < c$ sono consecutivi se $c - b = b - a = 2$. Chiamiamo "speciali" quei numeri interi che hanno tutte le cifre uguali e che si possono scrivere come somma dei quadrati di tre numeri dispari consecutivi.
   (a) Determinare tutti i numeri speciali di 4 cifre.
   (b) Esistono numeri speciali di 2000 cifre?

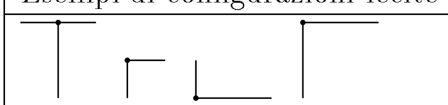
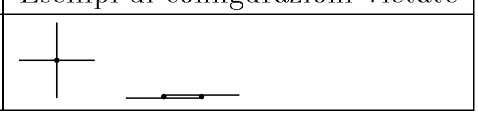
2. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso; poniamo $D\hat{A}B = \alpha$; $A\hat{D}B = \beta$; $A\hat{C}B = \gamma$; $D\hat{B}C = \delta$; $D\hat{B}A = \epsilon$. Sapendo che $\alpha < 90°$, $\beta + \gamma = 90°$, $\delta + 2\epsilon = 180°$, dimostrare che
$$(DB + BC)^2 = AD^2 + AC^2 \ .$$

3. È data una piramide avente per base un quadrilatero $ABCD$ e vertice $V$, inscritta in una sfera. Si sa che $AD = 2BC$, e che le rette ottenute prolungando $AB$ e $CD$ si incontrano in un punto $E$ dalla parte del segmento $BC$. Calcolare il rapporto fra il volume della piramide avente per base il triangolo $AED$ e vertice $V$ e la piramide data.

4. Fissato un intero $n > 1$, Alberto e Barbara giocano il seguente gioco:
   1.Alberto sceglie un intero positivo;
   2.Barbara sceglie un intero maggiore di 1 che sia multiplo o sottomultiplo del numero di Alberto (compreso il numero stesso);
   3.Alberto restituisce a Barbara il numero da lei detto, eventualmente aggiungendo o togliendo 1;
   il gioco prosegue ripetendo alternativamente i passi 2 e 3. Barbara vince se riesce a scegliere $n$ entro 50 mosse. Per quali valori di $n$ Barbara può vincere contro qualunque strategia di Alberto?

5. Un saldatore dispone di sbarrette metalliche di lunghezza 2, e vuole costruire una griglia costituita da $n \times n$ quadratini di lato 1 (esempio $5 \times 5$ a fianco). Gli è permesso segare a metà le sbarrette e saldarle fra loro, ma senza sovrapporle o incrociarle. Qual è il minimo numero di sbarrette che occorre segare per ottenere la griglia?



| Esempi di configurazioni lecite | Esempi di configurazioni vietate |
|---|---|
|  |  |

6. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(0) = 0$ e $0 \leq p(1) \leq 10^7$. Sapendo che esistono due interi positivi $a$, $b$ tali che $p(a) = 1999$ e $p(b) = 2001$, si determinino i valori possibili di $p(1)$.
   (Nota: si osservi che 1999 è un numero primo)

## Soluzioni

**1)** Supponiamo che un certo numero $N$ sia speciale e abbia 4 cifre. Allora esisterà un numero dispari $d$ tale che

$$N = (d-2)^2 + d^2 + (d+2)^2 = 3d^2 + 8. \tag{1}$$

Poiché $d$ è dispari, anche $N$ è dispari e dunque può essere solo 1111, 3333, 5555, 7777, 9999. Ora però $N$ non può essere 3333 o 9999, in quanto questi numeri sono divisibili per 3 mentre $3d^2+8$ non lo è; $N$ non può essere nemmeno 1111 o 7777, in quanto sottraendo 8 a questi numeri si ottiene una quantità (che dovrebbe essere $3d^2$) non divisibile per 3. L'unica possibilità è quindi che sia $N = 5555$, da cui si ricava facilmente $d = 43$. Pertanto $5555 = 41^2 + 43^2 + 45^2$ è l'unico numero speciale di 4 cifre.

Veniamo ora al caso delle 2000 cifre. Le possibilità per l'ultima cifra di $d$ sono 1, 3, 5, 7, 9; per l'ultima cifra di $d^2$ sono 1, 5, 9; per l'ultima cifra di $3d^2$ sono 3, 5, 7; infine per l'ultima cifra di $N = 3d^2 + 8$ sono 1, 3, 5.

Il caso in cui $N$ è costituito da tutti 3 si scarta in quanto $N$ sarebbe divisibile per 3 mentre $3d^2+8$ non lo è. Il caso in cui $N$ si scrive con tutti 5 si scarta perché $N-8$ si scriverebbe con 1998 cifre 5 seguite da 47, dunque non sarebbe divisibile per 3 (in quanto la somma delle sue cifre è $1998 \cdot 5 + 4 + 7$ che non è multiplo di 3).

Per esaminare il caso rimanente (tutte cifre 1) poniamo $d = 2k+1$ nella (1) e ricaviamo che $12k(k+1) = N - 11$. Poiché o $k$ o $k+1$ è un numero pari, il termine a sinistra nell'ultima uguaglianza è divisibile per 8, mentre il termine a destra è

$$\underbrace{11\ldots 11}_{1998 \text{ volte}}00 = 100 \cdot (\text{numero dispari})$$

e dunque non è divisibile per 8.

Questo permette di concludere che non esistono numeri speciali di 2000 cifre.

**2)** Sia $P$ il simmetrico di $C$ rispetto alla retta $AB$. Dalla congruenza dei triangoli $ABC$ e $ABP$ si ricava che

1. $A\hat{B}P = A\hat{B}C = \delta + \epsilon$;
2. $A\hat{P}B = A\hat{C}B = \gamma$;
3. $AP = AC$ e $BP = BC$.

Usando la prima informazione abbiamo che

$$D\hat{B}P = D\hat{B}A + A\hat{B}P = \epsilon + (\delta + \epsilon) = \delta + 2\epsilon = 180^\circ$$

e dunque i punti $P$, $B$, $D$ sono allineati.

Consideriamo ora il triangolo $APD$. Usando la seconda informazione abbiamo che

$$A\hat{P}D + A\hat{D}P = A\hat{P}B + A\hat{D}B = \gamma + \beta = 90^\circ,$$

dunque il triangolo $APD$ è rettangolo in $A$.

$$(DB + BC)^2 = (DB + BP)^2 = DP^2 = AP^2 + AD^2 = AC^2 + AD^2,$$

che è quello che si voleva dimostrare.

**3)** L'intersezione del piano su cui giace la base della piramide con la sfera in cui essa è inscritta è una circonferenza alla quale appartengono i punti $A$, $B$, $C$, $D$. Di conseguenza il quadrilatero $ABCD$ è inscrivibile in una circonferenza ed ha quindi gli angoli opposti supplementari (perchè a due a due insistenti su archi esplementari della stessa circonferenza). Consideriamo adesso i triangoli $ADE$ e $CBE$. Essi hanno l'angolo in $E$ in comune, inoltre $E\hat{C}B = E\hat{A}D$ perché entrambi supplementari di di $B\hat{C}D$. Analogamente $E\hat{B}C = E\hat{D}A$ perché entrambi supplementari di $A\hat{B}C$. Quindi il triangolo $ADE$ è simile a $CBE$ (avendo essi gli angoli rispettivamente uguali) con rapporto di similitudine $2 : 1$. Di conseguenza l'area di $ADE$ è il quadruplo dell'area di $BCE$ e $4/3$ dell'area di $ABCD$. Poiché le altezze delle due piramidi date sono coincidenti (sia il punto $V$ che i piani di base sono coincidenti), il rapporto fra i volumi delle piramidi $VABCD$ e $VADE$ coincide col rapporto fra le aree di base $ABCD$ e $ADE$, ed è quindi $4/3$.

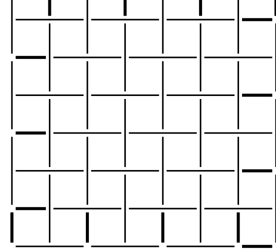
**4)** Barbara riesce a pronunciare il numero $n$ entro 50 mosse (in realtà ne sono necessarie al più 8), indipendentemente dalla strategia di Alberto, se e solo se $n$ è un multiplo di 6.

Supponiamo infatti che $n$ sia un multiplo di 6. Allora si ha che:

- se ad un certo passo Alberto sceglie un numero pari, al passo successivo Barbara può scegliere 2, al che Alberto può giocare solo 1, 2 o 3 ed in ogni caso al passo successivo Barbara potrà pronunciare $n$;
- se ad un certo passo Alberto sceglie un numero dispari $d$, al passo successivo Barbara può scegliere $3d$, al che Alberto o gioca un numero pari (ricadendo nel caso precedente) o lascia $3d$ invariato. A questo punto Barbara sceglie il numero 3, al che Alberto può giocare solo 2, 3 o 4. Se gioca 2 o 4 perde perché sono numeri pari, se gioca 3 perde perché al passo successivo Barbara gioca $n$.

Supponiamo ora che $n$ non sia multiplo di 6. Allora Alberto potrà sempre giocare un numero che non sia multiplo o sottomultiplo di $n$, impedendo così a Barbara di vincere alla mossa successiva. Una possibile strategia di Alberto è la seguente.

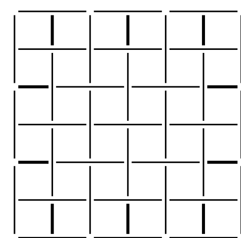
- Al primo passo sceglie $n + 1$.
- Quando Barbara restituisce un numero $a > n$, Alberto esamina $a$ e $a + 1$. Poiché $n > 1$, almeno uno dei due numeri non è multiplo di $n$ e dunque può essere giocato.
- Quando Barbara restituisce un numero $b < n$, Alberto esamina $b-1$, $b$ e $b+1$. Trattandosi di tre numeri consecutivi, almeno uno sarà pari ed almeno uno (eventualmente lo stesso) sarà divisibile per 3. Allora $n$ non può essere divisibile contemporaneamente per $b - 1$, $b$ e $b + 1$, perché altrimenti sarebbe divisibile per 6, il che è contro la nostra ipotesi. Quindi anche in questo caso almeno uno dei tre numeri può essere giocato "in sicurezza" da Alberto.



Se $n$ è dispari in ogni riga c'è una sbarretta di lunghezza 1 e quindi il numero di sbarrette di lunghezza 1 è almeno $2(n+1)$; sono pertanto necessari almeno $n+1$ tagli. Per la costruzione illustrata a fianco nel caso $n = 7$, ma facilmente generalizzabile ad ogni $n$ dispari, servono esattamente $n+1$ tagli, che è quindi il minimo per $n$ dispari.

Analizziamo ora il caso $n$ pari. Sia $R_2$ la seconda riga e $C_2$ la seconda colonna della griglia. Per ogni sbarretta di lunghezza due che compare in $R_2$ la colonna corrispondente al centro di tale sbarretta deve iniziare con una sbaretta di lunghezza 1 e pertanto, dato che la lunghezza di ogni colonna è pari, essa deve avere almeno due sbarrette di lunghezza 1.

Quindi se indichiamo con $i$ il numero di sbarrette di lunghezza 2 che compaiono in $R_2$, ci dovranno essere $n-2i$ sbarrette di lunghezza 1 in $R_2$ e almeno $2i$ sbarrette di lunghezza 1 nelle colonne. In conclusione tra la seconda riga e tutte le colonne ci sono almeno $n$ sbarrette di lunghezza 1. Ripetendo lo stesso ragionamento per $C_2$ si trova che ci sono almeno $n$ sbarrette di lunghezza 1 tra $C_2$ e tutte le righe. Sommando queste due stime si trova che il numero di sbarrette di lunghezza 1 è almeno $2n-k$ dove $k$ è il numero di sbarrette che sono state contate due volte (e cioè quelle appartenenti a $C_2$ o a $R_2$).



Nella stima si contano due sbarrette su $C_2$ (risp. $R_2$) solo se $R_2$ (risp. $C_2$) inizia con una sbarretta di lunghezza 2 (le sbarrette si incrocerebbero!). Ma questo non può succedere contemporaneamente per $R_2$ e $C_2$ e quindi $k$ è al più 2. Il minimo numero di sbarrette di lunghezza 1 è pertanto $2n-2$, il che forza $n-1$ tagli. La costruzione a fianco realizza tale valore per $n = 6$.

**6)** I valori possibili di $p(1)$ sono 1, 1999, 3.996.001, 7.992.001.

Per giustificare questi risultati, incominciamo a dimostrare che

- $a$ può essere solo 1 o 1999;
- $b$ è un divisore positivo di 2001;
- $b-a$ vale $\pm 1$ oppure $\pm 2$.

Per dimostrare queste affermazioni, osserviamo che da $p(0) = 0$ segue che il termine noto di $p(x)$ è nullo, dunque possiamo scrivere

$$p(x) = xq(x)$$

per un opportuno polinomio $q(x)$ a coefficienti interi. Sostituendo $x = a$ in tale relazione si ha che $aq(a) = 1999$ e dunque, poiché $a$ e $q(a)$ sono interi e 1999 è primo, la prima affermazione è dimostrata. La seconda affermazione si dimostra in modo analogo ponendo $x = b$.

Per la terza affermazione, osserviamo che dal teorema di Ruffini segue che

$$p(x) = (x-a)r(x) + p(a) = (x-a)r(x) + 1999$$

per un opportuno polinomio $r(x)$ a coefficienti interi. Sostituendo $x = b$ in tale relazione si ha che $(b-a)r(b) = 2$, cioè $b-a$ è un divisore di 2, che è equivalente alla terza affermazione.

Poiché $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$ è facile verificare che i soli valori positivi di $a$ e $b$ che soddisfano le tre condizioni sono $a = 1$, $b = 3$, oppure $a = 1999$, $b = 2001$.

Nel primo caso $p(1) = p(a) = 1999$. Rimane da verificare che esistono effettivamente polinomi che verificano le condizioni richieste nel testo con $a = 1$ e $b = 3$: ad esempio il polinomio di secondo grado $-666x^2 + 2665x$.

per il teorema di Ruffini,

$$p(x) - x = x(x - 1999)(x - 2001)s(x)$$

per un opportuno polinomio $s(x)$ a coefficienti interi. Sostituendo $x = 1$ si ha quindi che

$$p(1) = 1 + 1998 \cdot 2000 \cdot s(1).$$

Poiché abbiamo per ipotesi che $0 \leq p(1) \leq 10^7$, i soli valori possibili per $s(1)$ sono 0, 1, 2, cui corrispondono $p(1) = 1$, 3.996.001, 7.992.001.