XVII GARA NAZIONALE DI MATEMATICA

Cesenatico, 4 maggio 2001

1) Un esagono equiangolo ha quattro lati consecutivi lunghi nell'ordine 5, 3, 6 e 7. Determinare le lunghezze degli altri due lati.

2) In un torneo di pallacanestro ogni squadra affronta esattamente due volte tutte le altre squadre partecipanti. Il torneo viene vinto da una squadra sola in testa alla classifica con 26 punti, mentre esattamente due squadre arrivano ultime con 20 punti. Quante squadre hanno partecipato al torneo?

(Ricordiamo che nella pallacanestro si assegnano 2 punti alla squadra vincente e 0 a quella sconfitta, mentre non è possibile che una partita finisca in parità.)

3) Si consideri l'equazione

$$x^{2001} = y^x.$$

(a) Determinare tutte le coppie (x, y) di soluzioni in cui x è un numero primo e y è un intero positivo.
(b) Determinare tutte le coppie (x, y) di soluzioni in cui x e y sono interi positivi.

(Si ricordi che $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$)

4) Chiamiamo *numeri monotòni* gli interi positivi tali che

- si scrivono usando almeno due cifre;
- nessuna cifra è zero;
- le cifre compaiono in ordine strettamente crescente o strettamente decrescente.

(Ad esempio 127 e 9742 sono numeri monotoni, mentre 172, 1224 e 7320 non lo sono.)

(a) Calcolare la somma di tutti i numeri monotoni di cinque cifre.
(b) Determinare con quanti zeri termina il minimo comune multiplo di tutti i numeri monotoni (senza vincoli sul numero di cifre).

5) Sia ABC un triangolo e sia γ la circonferenza inscritta in ABC. La circonferenza γ è tangente al lato AB nel punto T. Sia D il punto di γ diametralmente opposto a T, e sia S il punto di intersezione della retta passante per C e D con il lato AB.
Dimostrare che $AT = SB$.

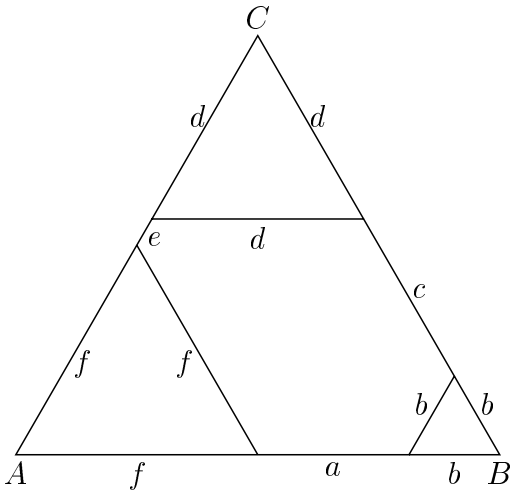
6) Un pannello contiene 100 lampadine, disposte in modo da formare un quadrato di 10 righe e 10 colonne. Alcune di esse sono accese, le altre sono spente.
L'impianto elettrico è tale che quando si preme il pulsante corrispondente ad una qualunque delle lampadine, cambiano di stato (cioè, si accendono o si spengono) tutte le lampadine che si trovano sulla sua colonna e tutte quelle che si trovano sulla sua riga (compresa la lampadina corrispondente all'interruttore premuto).

(a) Partendo da quali configurazioni, operando opportunamente, è possibile fare in modo che alla fine tutte le lampadine risultino accese?
(b) Qual è la risposta alla domanda precedente se le lampadine sono 81, disposte in modo da formare un pannello di 9 righe e 9 colonne?

XVII GARA NAZIONALE DI MATEMATICA

Cesenatico, 4 maggio 2001

Soluzioni

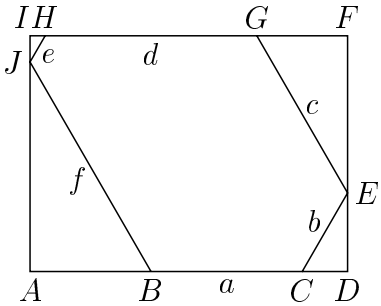


1) Siano a, b, c, d, e, f i lati dell'esagono con $a = 5$, $b = 3$, $c = 6$, $d = 7$. Si prolunghino i lati a, c, e fino ad incontrarsi nei punti B, C, A (vedi figura). Poiché gli angoli interni dell'esagono sono tutti di 120°, il triangolo ABC e i tre triangolini determinati da ciascuno dei lati f, b, d e rispettivamente dai vertici A, B, C sono tutti equilateri, dato che tutti i loro angoli sono di 60°. Abbiamo pertanto che

$$b + c + d = d + e + f = f + a + b,$$

da cui, sostituendo i valori noti, si ricava facilmente che $f = 8$ ed $e = 1$.

Seconda soluzione



Indicati i lati come nella soluzione precedente, si mandino le perpendicolari al lato a per i punti E e J; siano A, D e I, F le intersezioni di tali perpendicolari con le rette dei lati a e d rispettivamente (vedi figura). Poiché gli angoli interni dell'esagono sono tutti di 120°, tutti i triangoli in figura hanno angoli di 60°, 30° e 90°; quindi AI e DF sono perpendicolari anche ad IF; ne segue che AD è parallelo ad IF, e il quadrilatero $ADFI$ è un rettangolo come in figura.

Con facili calcoli si ricava che

$$AD = AB + BC + CD = \frac{f}{2} + a + \frac{b}{2}, \qquad IF = IH + HG + GF = \frac{e}{2} + d + \frac{c}{2},$$

$$AI = AJ + JI = \frac{\sqrt{3}}{2}(f + e), \qquad FD = FE + ED = \frac{\sqrt{3}}{2}(c + b).$$

Sostituendo i valori noti di a, b, c, d, ed imponendo le uguaglianze $AD = IF$, $AI = FD$, si ottiene che $f - e = 7$, $f + e = 9$, da cui $f = 8$ ed $e = 1$.

2) Indichiamo con n il numero delle squadre partecipanti. Il numero di partite giocate durante tutto il torneo sarà uguale a $n(n-1)$, tante quante sono le coppie ordinate di elementi distinti di un insieme con n elementi.

Indichiamo con M la media aritmetica dei punteggi totalizzati dalle squadre alla fine del torneo. Siccome ad ogni partita si assegnano 2 punti, si ha $M = 2n(n-1)/n = 2(n-1)$.

Notiamo che, poiché ogni squadra può aver ottenuto solo un numero pari di punti, tutte le squadre che non si sono classificate né al primo né all'ultimo posto hanno conquistato al più 24 punti. Si ha allora

$$M \leqslant \frac{26 + 24(n-3) + 20 \cdot 2}{n} = \frac{66 + 24(n-3)}{n} = \frac{24n - 6}{n} < 24\ .$$

D'altra parte M è pari e maggiore di 20, perché tutte le squadre hanno almeno 20 punti e ne esiste una che ne ha di più. Pertanto l'unico valore possibile per M è 22, da cui si ricava che il numero di squadre partecipanti al torneo è uguale a 12.

È infine facile verificare che esiste un torneo a 12 squadre che soddisfa le ipotesi del problema. Se infatti la squadra A batte le squadre B e C in tutti gli incontri, mentre tutti gli altri scontri si concludono con una vittoria per parte, alla fine del torneo A avrà totalizzato 26 punti, B e C ne avranno totalizzati 20 e gli altri 9 partecipanti concluderanno il torneo con 22 punti.

3) Parte (a). Le coppie richieste sono: $(3, 3^{667})$, $(23, 23^{87})$, $(29, 29^{69})$.

Sia infatti $x = p$ un numero primo. Allora dall'equazione segue che nella fattorizzazione di y non ci possono essere fattori primi diversi da p, dunque $y = p^n$ per un qualche n. Sostituendo nell'equazione abbiamo così che $p^{2001} = p^{np}$, da cui $2001 = np$. Ne segue che p deve essere un fattore primo di 2001 ed $n = 2001/p$. Otteniamo in questo modo le tre coppie elencate.

Parte (b). Le coppie richieste sono

$(1, 1), (3, 3^{667}), (23, 23^{87}), (29, 29^{69}), (69, 69^{29}), (87, 87^{23}), (667, 667^3), (2001, 2001)$.

Sia p un primo che compare con esponente n nella fattorizzazione di x. Allora dall'equazione abbiamo che p compare anche nella fattorizzazione di y, con un esponente che indichiamo con k. Possiamo pertanto scrivere $x = p^n a$, $y = p^k b$, dove a e b non sono divisibili per p. Sostituendo nell'equazione troviamo che $p^{2001n} \cdot a^{2001} = p^{kp^n a} \cdot b^{p^n a}$. Uguagliando gli esponenti relativi al primo p, si ha dunque che $2001n = kap^n$, e quindi p^n divide $2001n$. Abbiamo ora due casi.

- Se p non divide 2001, allora p^n deve dividere n, il che è impossibile visto che $p^n > n$ (poiché $p^n \geq 2^n = (1+1)^n = 1^n + n \cdot 1^{n-1} + \ldots > n$).
- Se p è un fattore di 2001, allora p^{n-1} deve dividere n, il che è possibile solo per $n = 1$. Infatti per $n > 1$ si ha che $p^{n-1} \geq 2^{n-1} = (1+1)^{n-1} = 1^n + (n-1) \cdot 1^{n-1} + \ldots > n$.

Abbiamo così dimostrato che p può essere solo 3, 23, o 29, e deve comparire con esponente 1 nella fattorizzazione di x. Pertanto x è necessariamente un divisore di 2001.

D'altra parte se d è un qualunque divisore di 2001, posto $e = 2001/d$ si ottiene immediatamente $d^{2001} = d^{ed} = (d^e)^d$, quindi la coppia (d, d^e) è soluzione dell'equazione.

Seconda Soluzione

Sia d il M.C.D. tra x e 2001, e pongasi $x = da$, $2001 = de$, cosicché a, e sono primi fra loro. L'equazione si semplifica in $x^e = y^a$, e quindi si ha $x = z^a$, per un opportuno z, come si evince dal confronto tra gli esponenti di ciascun fattore primo di x nei due membri dell'equazione.

Poiché x e z hanno gli stessi fattori primi e d, come divisore di 2001, è prodotto di primi distinti, si ha anche $z = db$, e quindi $da = (db)^a$, ossia $a = b^a d^{a-1}$.

Questo implica che $x = d$, e quindi x divide 2001. Infatti se $b > 1$, allora $b^a > a$, mentre se $b = 1$ e $a, d > 1$, allora $d^{a-1} \geq 3^{a-1} > 2^{a-1} \geq a$.

(Si ricordi che per ogni $b \geq 2$ ed ogni intero $a \geq 0$ si ha $b^a = (1+(b-1))^a = 1+a(b-1)+\ldots \geq a+1$).

D'altra parte se d è un qualunque divisore di 2001, posto $e = 2001/d$ si ottiene immediatamente $d^{2001} = d^{ed} = (d^e)^d$, quindi la coppia (d, d^e) è soluzione dell'equazione.

4) Parte (a). Chiamiamo *crescenti* i numeri monotoni le cui cifre compaiono in ordine crescente, e analogamente chiamiamo *decrescenti* i numeri monotoni le cui cifre compaiono in ordine decrescente. Chiamiamo inoltre *gemello* di un numero monotono N, l'intero che si scrive sostituendo ogni cifra di N con il suo complementare a 10. Così, ad esempio, il gemello di 12578 è 98532.

Si noti che ogni numero decrescente è il gemello di un numero crescente, e viceversa. Inoltre, è facile vedere che la somma di un numero monotono di cinque cifre e del suo gemello è sempre uguale a 111 110.

Supponiamo ora di aver scritto la somma S di tutti i numeri monotoni di cinque cifre. In tale somma possiamo raggruppare gli addendi a due a due, in modo che a ogni numero crescente corrisponda il suo gemello decrescente. Per l'osservazione precedente, facendo le somme a due a due, abbiamo che S diventa la somma di addendi tutti uguali a 111 110. Inoltre gli addendi sono tanti quanti i numeri crescenti, i quali a loro volta sono tanti quanti i modi di scegliere cinque cifre diverse in un insieme di nove, e cioè

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!\,4!} = 126 \ .$$

Senza utilizzare il significato combinatorio dei coefficienti binomiali si può ragionare nel modo seguente. Scegliamo anzitutto le 5 cifre diverse che costituiscono il numero: la prima si puo' scegliere in 9 modi diversi, la seconda in 8, ... , la quinta in 5. Cosí facendo non otteniamo sempre un numero crescente: infatti, per ottenerlo, la prima cifra deve essere la piú piccola delle 5 scelte, il che succede solo una volta su 5, la seconda deve essere la piú piccola delle 4 rimaste, il che succede solo una volta su 4, e cosí via. Di conseguenza i numeri crescenti sono

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 126.$$

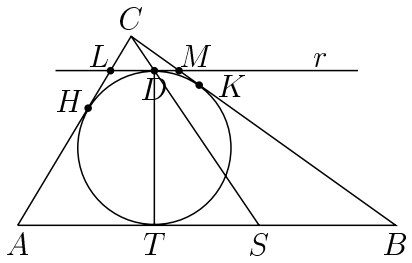
Pertanto la somma di tutti i numeri monotoni di cinque cifre è $126 \cdot 111\,110 = 13\,999\,860$.

Parte (b). Indichiamo con M il minimo comune multiplo di tutti i numeri monotoni. Osserviamo preliminarmente che l'insieme dei numeri monotoni è finito (perché nessun numero monotono può avere più di nove cifre), dunque M è ben definito.

Per sapere con quanti zeri termina M, occorre conoscere la più grande potenza di 10 che divide M. A tale scopo consideriamo separatamente le potenze di 2 e di 5. Incominciamo ad analizzare il caso del 5. La più grande potenza di 5 che divide M è uguale alla più grande potenza di 5 per cui è divisibile un numero monotono. Tale potenza è almeno 3, poiché $5^3 = 125$ è un numero monotono. Inoltre tutti gli interi divisibili per 125 terminano necessariamente con 000, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875, e di conseguenza i multipli monotoni di 125 possono terminare solo con 125 o 875. I soli numeri monotoni ad avere tale terminazione sono 125, 875, 9875, nessuno dei quali è divisibile per 5^4. Pertanto la più grande potenza di 5 che divide M è 5^3.

Poiché ovviamente M contiene più di tre fattori 2 (ad esempio $2^4 = 16$ è un numero monotono), ne segue che M termina con esattamente 3 zeri.

5) Con riferimento alla figura a fianco, tracciamo la retta r passante per D e parallela al lato AB. Siano L ed M, rispettivamente, le intersezioni di r con i lati AC e BC. Denotiamo inoltre con H e K, rispettivamente, i punti di tangenza di γ con i lati AC e BC. Poiché sulle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza risultano uguali i segmenti compresi fra il dato punto esterno e i rispettivi punti di contatto (nel seguito "teorema delle tangenti") abbiamo $CH = CK$, $LH = LD$ e $MK = MD$. Scrivendo $CH = CL+LH$, $CK = CM+MK$ e, sfruttando le uguaglianze precedenti, si ha



$$CL + LD = CM + MD \ .$$

I triangoli CLM e CAB sono simili, perché hanno i lati paralleli. Moltiplicando l'uguaglianza precedente per il rapporto di similitudine, otteniamo $CA + AS = CB + BS$, ossia $CH + HA + AT + TS = CK + KB + BS$. Utilizzando ancora il teorema delle tangenti, abbiamo $CH = CK$, $AH = AT$ e $KB = TB = TS + SB$. Ne segue che $2AT + TS = TS + 2BS$, e quindi $AT = BS$.

6) (a) È facile verificare che se si preme il pulsante di tutte le lampadine di una riga e di una colonna tutte le lampadine del pannello cambiano di stato un numero pari di volte, con l'unica eccezione proprio della lampadina che si trova all'incrocio della riga e della colonna considerata, che cambia stato 19 volte.

In definitiva queste "mosse" consentono di accendere una lampadina alla volta. È dunque possibile raggiungere la configurazione in cui tutte le lampadine sono accese partendo da qualsiasi configurazione.

(b) In questo caso è facile verificare che premendo il pulsante di una singola lampadina il numero di lampadine che cambiano di stato su ogni singola riga e su ogni singola colonna è comunque dispari (o 1 o 9). Conseguenza di questo fatto è che condizione necessaria per raggiungere la configurazione

in cui tutte le lampadine sono accese è che all'inizio il numero di lampadine accese sia pari per tutte le righe e per tutte le colonne o sia dispari per tutte le righe e tutte le colonne.

Tale condizione è d'altra parte anche sufficiente. Supponiamo infatti di partire da una configurazione in cui ci sia un numero dispari di lampadine spente in ogni riga e ogni colonna. Premiamo il pulsante di tutte le lampadine spente. In questo modo ogni lampadina accesa cambia di stato tante volte quante sono le lampadine spente sulla sua stessa riga e sulla sua stessa colonna, quindi un numero pari di volte (dispari + dispari), mentre ogni lampadina spenta cambia di stato un numero dispari di volte (dispari + dispari -1, dove il "-1" serve a non contare due volte la lampadina spenta in questione, una volta come componente della sua riga e un'altra come componente della sua colonna): dunque tutte le lampadine accese rimangono accese, e tutte quelle spente si accendono.

La stessa mossa, cioè premere il pulsante di tutte le lampadine spente, funziona anche se nella configurazione di partenza c'è un numero pari di lampadine spente in ogni riga e ogni colonna. Infatti anche in questo caso le lampadine accese cambiano stato un numero pari di volte (pari + pari), mentre quelle spente cambiano stato un numero dispari di volte (pari + pari -1).

Osservazione. L'unica informazione usata nella dimostrazione della parte (a) è che il pannello ha un numero pari di righe e colonne, così come nella dimostrazione della parte (b) si è usato solo che il pannello ha un numero dispari di righe e colonne.