Problema 1
Determinare tutti gli interi positivi di tre cifre che sono uguali a 34 volte la somma delle loro cifre.
Soluzione 1
Gli interi richiesti sono 102, 204, 306, 408.
Indichiamo infatti con a, b, c, rispettivamente, la cifra delle centinaia, delle decine, delle unità di un intero di 3 cifre. La condizione data si traduce allora in $100a + 10b + c = 34(a + b + c)$, da cui, con semplici passaggi algebrici, si ricava che $11(2a - c) = 8b$.
Da questa segue che b deve essere un multiplo di 11, ma poiché $0 \leq b \leq 9$, l'unica possibilità è che sia $b = 0$, e di conseguenza anche $2a = c$. Sostituendo a c i valori 1, 2, 3, 4 si ottengono i 4 interi riportati, che si verifica facilmente che sono effettivamente soluzioni del problema. Per $c = 0$ o $c \geq 5$ non si ottengono invece interi di 3 cifre.

Problema 2
La pianta di una casa ha la forma di una L ottenuta affiancando in modo opportuno quattro quadrati il cui lato misura 10 metri. Le pareti laterali sono tutte alte 10 metri e il tetto della casa ha sei facce partenti dai sei muri laterali e inclinate di 30° rispetto ad un piano orizzontale.
Determinare il volume della casa (cioè del solido delimitato dalle sei facce del tetto, dai sei muri laterali e dal piano orizzontale).
Soluzione 2
Il sottotetto visto dall'alto ha la forma della figura 1, poichè i punti di incontro delle varie facce del tetto sono equidistanti dagli spigoli della base poichè tutte le facce hanno la stessa inclinazione rispetto all'orizzontale.
Osserviamo che possiamo trasformare il sottotetto come in figura 2 senza alterarne il volume. Basta quindi calcolare il volume di questa nuova figura. Osserviamo che la parte centrale della nuova figura è un prisma a base triangolare, con altezza h_{pr} 30 metri. Il triangolo di base è isoscele con angoli alla base di 30° e base b_{tr} lunga 10 metri. Quindi l'altezza h_{tr} del triangolo misura $\frac{5}{\sqrt{3}}$ metri.

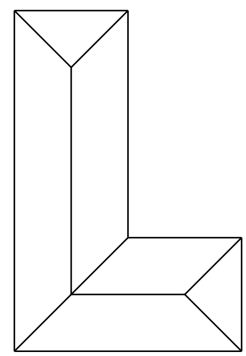


Figura 1

Figura 2

Il volume del prisma è quindi:

$$V_{pr} = \frac{1}{2} b_{tr} h_{tr} h_{pr} = \frac{750}{\sqrt{3}}\ m^3$$

Le due parti restanti del solido possono essere unite per formare una piramide a base quadrata con lato di base di 10 metri e altezza h_{pir} di $\frac{5}{\sqrt{3}}$ metri. Il volume della piramide è quindi:

$$V_{pir} = \frac{1}{3} l^2 h_{pir} = \frac{500}{3\sqrt{3}}\ m^3$$

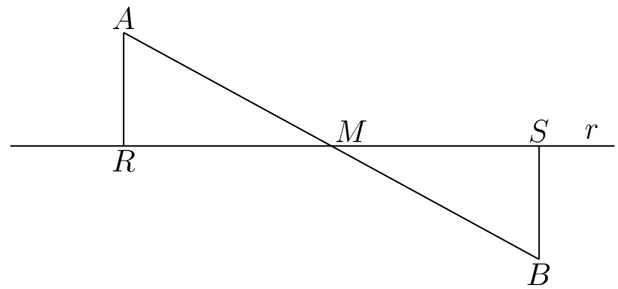
Il volume totale del sottotetto è:

$$V_{tot} = V_{pr} + V_{pir} = \frac{2750}{3\sqrt{3}}\ m^3$$

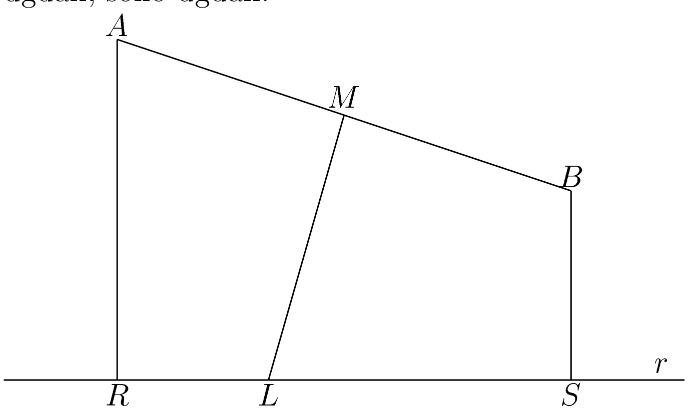
rispettivamente. Chiamato M il punto medio del segmento AB, dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli ARM e BSM sono uguali (supponendo che i trangoli non siano degeneri).

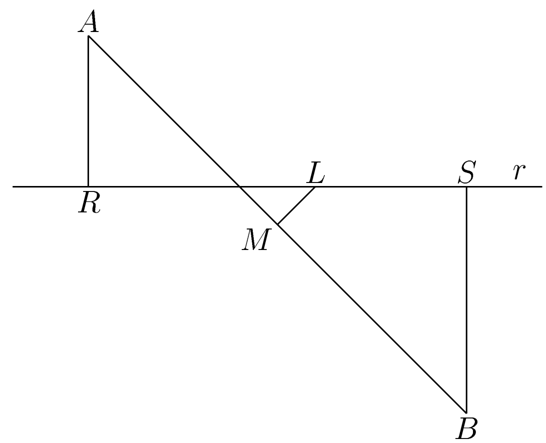
Soluzione 3

Se M giace su r, i due triangoli sono uguali. Infatti sono entrambi rettangoli, hanno gli angoli in M uguali perché opposti al vertice ed hanno ipotenuse di uguale lunghezza. In particolare le circonferenze circoscritte sono uguali.



Altrimenti tracciamo l'asse del segmento AB: poiché i triangoli non sono degeneri, questo non è parallelo a r, e la interseca in un punto che chiamiamo L. Dimostriamo che le due circonferenze si intersecano in L. I punti R ed M vedono il segmento AL sotto un angolo retto, dunque si trovano entrambi su una circonferenza di diametro AL. In altre parole L appartiene alla circonferenza passante per A, M ed R. Allo stesso modo si trova che L appartiene anche all'altra circonferenza. I diametri delle due circonferenze sono dunque AL e BL, ma L è sull' asse di AB, perciò $AL = BL$. Le due circonferenze, avendo diametri uguali, sono uguali.





Problema 4

Deteminare per quali valori di n tutte le soluzioni dell'equazione $X^3 - 3X + n = 0$ sono numeri interi.

Soluzione 4

Se a, b, c sono le tre soluzioni (non necessariamente distinte) dell'equazione $X^3 - 3X + n = 0$, allora

$$X^3 - 3X + n = (X - a)(X - b)(X - c) = X^3 - (a + b + c)X^2 + (ab + ac + bc)X - abc.$$

Ne segue che

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ ab + ac + bc = -3 \\ abc = -n. \end{cases}$$

Osservando che $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$, si ottiene $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Se a, b, c sono interi, questo è possibile solo se due dei quadrati sono uguali a 1 e il terzo è uguale a 4. Pertanto possiamo assumere, per simmetria, che $a = \pm 1$, $b = \pm 1$, $c = \pm 2$. Poiché inoltre si deve avere che $a + b + c = 0$, le sole possibilità sono $a = b = 1$, $c = -2$ e $a = b = -1$, $c = 2$, da cui, rispettivamente, $n = 2$ e $n = -2$. Per quanto abbiamo appena osservato,

$$X^3 - 3X + 2 = (X - 1)^2(X + 2), \quad X^3 - 3X - 2 = (X + 1)^2(X - 2)$$

e quindi $n = 2$ e $n = -2$ sono effettivamente soluzioni del problema.

Problema 5

Dividiamo la dimostrazione in tre parti

- Se n fosse dispari
$$5^n + 1 = (5+1)(5^{n-1} - 5^{n-2} + \ldots - 5 + 1)$$
sarebbe divisibile per 6, e quindi m sarebbe divisibile per 3.

- Se n fosse pari, ma non multiplo di 4, diciamo $n = 2d$ con d dispari, allora
$$3^n + 1 = 9^d + 1 = (9+1)(9^{d-1} - 9^{n-2} + \ldots - 9 + 1)$$
sarebbe divisibile per 10, e quindi m sarebbe divisibile per 5.

- Dato che possiamo assumere n pari, poniamo $n = 2k$ cosicché $m = 25^k + 9^k + 1$. Vogliamo dimostrare che se k non è divisibile per 3 allora m è divisibile per 7.

  Osserviamo anzitutto che $(a+b)^k = b^k +$ un multiplo di a, come si vede sviluppando i 2^k termini del prodotto, o applicando la formula del binomio di Newton.

  Poiché $25 = 21 + 4$ e $9 = 7 + 2$, si ha $25^k = 4^k +$ un multiplo di 7, e analogamente $9^k = 2^k +$ un multiplo di 7. Quindi, a meno di multipli di 7, si ha $m = 4^k + 2^k + 1$ e quindi, sempre a meno di multipli di 7, $(2^k - 1)m = 8^k - 1$.

  Poiché $8^k = (7+1)^k = 1 +$ un multiplo di 7, rimane solo da vedere che $2^k - 1$ non è divisibile per 7 se k non è multiplo di 3.

  In effetti, posto $k = 3q + r$ (con $r = 1, 2$), si ha $2^k = 8^q \cdot 2^r = 2^r +$ un multiplo di 7, e quindi $2^k - 1$ non è divisibile per 7.

In conclusione, se m è primo n deve essere multiplo di 3 e di 4, quindi di 12.

È interessante notare che per $n = 12$ si ha $m = 244672067$, che è effettivamente primo.

Problema 6
Sia data una scacchiera di 100 righe e 100 colonne, con tutte le caselle bianche.

(a) È possibile colorare un numero dispari di caselle in modo tale che ogni casella colorata abbia un numero dispari di caselle colorate adiacenti?

(b) È possibile colorare alcune caselle in modo tale che un numero dispari di esse abbia esattamente 4 caselle adiacenti colorate e tutte le altre caselle colorate abbiano esattamente 2 caselle adiacenti colorate?

(c) È possibile colorare alcune caselle in modo tale che un numero dispari di esse abbia esattamente 2 caselle adiacenti colorate e tutte le altre caselle colorate abbiano esattamente 4 caselle adiacenti colorate?

Nota: Due caselle si considerano adiacenti se hanno un lato in comune.

Soluzione 6

(a) Non è possibile. Infatti, siano $C_1, \ldots, C_m$ le caselle colorate, sia a_i il numero delle caselle colorate adiacenti a C_i per $i = 1, \ldots, m$ e sia l il numero dei lati in comune a due caselle adiacenti colorate. Abbiamo $a_1 + \cdots + a_m = 2l$, poiché ogni lato è in comune a due caselle e quindi viene contato due volte; in particolare, $a_1 + \cdots + a_m$ è un numero pari. Se m fosse dispari e a_i fosse dispari per ogni i, allora la somma $a_1 + \cdots + a_m$ sarebbe dispari, e dunque si avrebbe una contraddizione.

trovano nelle prime due righe e nelle prime due colonne della scacchiera e il quadrato 2x2 costituito dalle caselle che si trovano nella seconda e terza riga e nella seconda e terza colonna della scacchiera. La casella nella seconda riga e nella seconda colonna è comune ai due quadrati ed è l'unica che ha quattro caselle adiacenti colorate. Tutte le altre caselle colorate hanno 2 caselle a loro adiacenti colorate.

(c) Non è possibile. Infatti, supponiamo di colorare alcune caselle della scacchiera in modo tale che ciascuna di esse abbia 2 o 4 caselle adiacenti colorate. Distinguiamo le caselle della scacchiera in due tipi, secondo quella che sarebbe loro normale colorazione in bianco e nero. Per non generare confusione, supponiamo che la colorazione richiesta dal problema venga fatta in verde. Chiamiamo b il numero di caselle verdi del primo tipo ed n il numero di caselle verdi del secondo tipo. Inoltre, scriviamo $b = b_2 + b_4$, dove b_2 è il numero di caselle del primo tipo con due caselle adiacenti verdi e b_4 è il numero di caselle del primo tipo con 4 caselle adiacenti verdi; analogamente scriviamo $n = n_2 + n_4$. Poiché le caselle adiacenti a quelle del primo tipo sono necessariamente del secondo tipo, e viceversa, contando il numero l di lati comuni a due caselle verdi come nel punto (a), si ottiene $l = 2b_2 + 4b_4 = 2n_2 + 4n_4$, da cui $b_2 - n_2 = 2(n_4 - b_4)$ è necessariamente un numero pari. Ma allora anche $b_2 + n_2 = (b_2 - n_2) + 2n_2$ è necessariamente pari, e pertanto una colorazione con le proprietà richieste in (c) è impossibile.

(c)-(seconda soluzione) Non è possibile. Per dimostrarlo, contiamo in due modi diversi il numero l di lati comuni a due caselle colorate.

(i) Indicando con c_2 il numero di caselle colorate con 2 caselle adiacenti colorate, e con c_4 il numero di caselle colorate con 4 caselle adiacenti colorate, avremo che

$$l = \frac{2c_2 + 4c_4}{2} = c_2 + 2c_4,$$

dove la divisione per 2 tiene conto del fatto che al numeratore ogni lato è stato contato due volte. Se c_2 fosse dispari, da questa formula seguirebbe che anche l dovrebbe essere dispari.

(ii) Pensiamo ora di distinguere le caselle della scacchiera in due categorie, a seconda di quella che sarebbe la loro colorazione standard in bianco e nero. Per non generare confusione, supponiamo che la colorazione richiesta dal problema venga fatta in verde. Poiché una coppia di caselle verdi adiacenti è sempre costituita da una casella ex-bianca e una casella ex-nera, ne segue che per calcolare l basta sommare tutte le adiacenze che partono da caselle verdi ex-bianche, senza dividere per 2. Ma poiché da ogni casella verde partono o 2 o 4 adiacenze, tale somma è necessariamente pari, in contrasto con il punto precedente.