XX Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico, 7 maggio 2004

1. Osservando le temperature registrate a Cesenatico negli ultimi mesi di dicembre e gennaio, Stefano ha notato una strana coincidenza: in tutti i giorni di questo periodo (esclusi il primo e l'ultimo) la temperatura minima è stata la somma della temperatura minima del giorno precedente e del giorno successivo.

   Sapendo che il 3 dicembre la temperatura minima è stata di 5 gradi, ed il 31 gennaio è stata di 2 gradi, determinare la temperatura minima del 25 dicembre.

   Soluzione:
   La temperatura minima registrata il 25 dicembre è stata di -3 gradi.

   Per dimostrarlo, indichiamo con x la temperatura minima registrata il primo dicembre e con y la temperatura minima registrata il 2 dicembre. Usando la relazione osservata da Stefano, si può ricavare la temperatura minima in un dato giorno, conoscendo quelle dei due giorni precedenti: in questo modo si ottiene che le temperature minime nei primi giorni di dicembre sono quelle riportate nella seguente tabella

Giorno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temp. minima	x	y	$y-x$	$-x$	$-y$	$x-y$	x	y	$y-x$	$-x$

   Si vede quindi facilmente che la successione delle temperature si ripete con una cadenza di 6 giorni. Di conseguenza la temperatura minima del 3 dicembre è stata $y-x$, mentre quella del 31 gennaio, che è il 62-esimo giorno del periodo, coincide con quella del secondo, cioè y. Dalle informazioni si deduce quindi che $y-x=5$ e $y=2$, da cui $x=-3$.

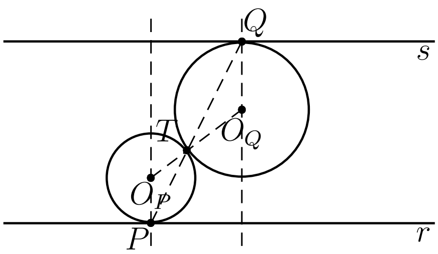
   Ora la temperatura minima del 25 dicembre coincide con quella del primo, in quanto $25-1$ è multiplo di 6, ed è stata quindi di -3 gradi.

2. Date nel piano due rette parallele r, s e due punti P, Q con $P \in r$ e $Q \in s$, si considerino coppie di circonferenze (C_P, C_Q), la prima tangente a r in P e la seconda tangente a s in Q, che siano anche tangenti esternamente tra loro, in un punto che chiamiamo T. Determinare il luogo di tali punti T al variare di tutte le possibili coppie di circonferenze.

   Soluzione:
   Il luogo cercato è l'unione del segmento aperto PQ e della parte della circonferenza di diametro PQ che si trova al di fuori della striscia delimitata da r ed s.

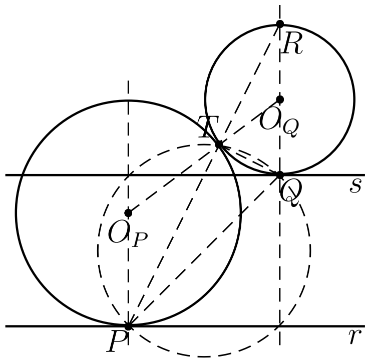
   Ciascuna circonferenza può essere tangente alla rispettiva retta in due modi: in un caso interseca la striscia S compresa tra le due rette, nell'altro non la interseca affatto. In tutti e due i casi il centro della circonferenza (risp. O_P, O_Q) si trova lungo la perpendicolare alla retta per il punto di tangenza. Se poi le circonferenze sono tangenti in T, la retta per i due centri passa per T.

   Per la coppia di circonferenze questo ci porta a 4 casi: escludiamo subito quello in cui nessuna delle due circonferenze interseca S, perché in questo caso le circonferenze non possono essere tangenti tra loro.



   Supponiamo dapprima che intersechino entrambe S: T appartiene allora a sua volta ad S. Gli angoli $P\hat{O}_PT$ e $T\hat{O}_QQ$ sono alterni interni rispetto alle due rette parallele PO_P e QO_Q (che sono tali in quanto entrambe perpendicolari a r ed s) tagliate dalla trasversale O_PO_Q, e quindi sono uguali. Essi sono gli angoli al centro dei due triangoli isosceli PO_PT e TO_QQ, che hanno perciò anche gli angoli alla base uguali: da $O_P\hat{P}T = O_Q\hat{Q}T$ si deduce infine che P, T e Q sono allineati, cioè che T è un punto interno al segmento PQ.

   Viceversa, se T è un punto interno al segmento PQ, sia O_P il punto di intersezione dell'asse di PT con la perpendicolare ad r passante per P, e sia O_Q il punto di intersezione dell'asse di QT con la perpendicolare ad s passante per Q. Per la similitudine dei triangoli isosceli PO_PT e QO_QT, si ha, analogamente a prima, che T giace sul segmento $O_P O_Q$. Tracciando la circonferenza di centro O_P e tangente ad r e la circonferenza di centro O_Q e tangente ad s, si trova dunque che T giace sulla retta dei centri ed appartiene ad entrambe le circonferenze, per cui le due circonferenze sono tangenti esternamente in T.



Supponiamo ora che solo una delle due intersechi S: per simmetria, supponiamo che questo avvenga per C_P. Il punto T appartiene allora al semipiano (aperto) H delimitato da s non contenente r. Sia R il punto simmetrico di Q rispetto a O_Q. La tangente per R a O_Q è parallela a s e quindi a r; per quanto dimostrato nel primo caso, P, T e R sono allineati. Ma siccome Q e R sono diametralmente opposti, QT è perpendicolare a PR. Ma allora T deve appartenere ad una semicirconferenza di diametro PQ, oltre che ad H.
Viceversa, se T è un punto del semipiano H appartenente alla semicirconferenza di diametro PQ, costruiamo, come nel primo caso, O_P come il punto di intersezione dell'asse di PT con la perpendicolare ad r passante per P e O_Q come il punto di intersezione dell'asse di QT con la perpendicolare ad s passante per Q. La verifica che la circonferenza di centro O_P e raggio $O_P P$ e la circonferenza di centro O_Q e raggio $O_Q Q$ sono tangenti in T è uguale a quella del primo caso.

Il luogo cercato è quindi l'unione del segmento aperto PQ e della parte della circonferenza di diametro PQ che si trova al di fuori della striscia (chiusa) delimitata da r ed s.

Osserviamo che i punti appartenenti al resto della retta o della circonferenza (P e Q esclusi) sono punti T per cui esistono coppie di circonferenze tangenti alle rette in P e Q rispettivamente e tangenti tra loro *internamente* in T.

Soluzione alternativa al secondo caso:
Osservando come prima che PO_PT e QO_QT sono triangoli isosceli e che i loro angoli al vertice $P\hat{O}_PT$ e $Q\hat{O}_QT$ sono supplementari, si ottiene per differenza che la somma degli angoli alla base di questi due triangoli sono complementari. Ne segue che $P\hat{T}Q = 180^o - P\hat{T}O_P - Q\hat{T}O_Q = 90^o$. Da qui si conclude come nella soluzione precedente.

3. (*a*) Determinare se 2005^{2004} è somma di due quadrati perfetti positivi.
   (*b*) Determinare se 2004^{2005} è somma di due quadrati perfetti positivi.

Soluzione:

(*a*) 2005^{2004} è somma di due quadrati perfetti positivi.
Si osservi che $5^2 = 3^2 + 4^2$ e che $2005^{2004} = 5^2 m^2$, dove $m = 5^{1001} \cdot 401^{1002}$. Moltiplicando la prima relazione per m^2 si ottiene

$$2005^{2004} = (5m)^2 = (3m)^2 + (4m)^2.$$

(*b*) 2004^{2005} non è somma di due quadrati perfetti positivi.
Si osservi innanzitutto che $2004^{2005} = 3^{2005} \cdot 668^{2005}$ è divisibile per 3. Controllando il resto della divisione per 3 del quadrato di un numero intero x, si vede che se x è divisibile per 3 esso è 0, mentre se non lo è, e quindi $x = 3k \pm 1$, allora $x^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$, quindi il resto è 1. Se esistessero interi positivi x, y tali che $2004^{2005} = x^2 + y^2$, allora $x^2 + y^2$ sarebbe divisibile per 3, e quindi lo sarebbe anche la somma dei resti di x^2 e y^2. Analizzando tutti i casi, si vede che l'unica possibilità è che sia x che y siano divisibili per 3. Ora poniamo $x = 3x_1$, $y = 3y_1$. Semplificando l'equazione $2004^{2005} = x^2 + y^2$ per il fattore comune 9, si ottiene $3^{2003} \cdot 668^{2005} = x_1^2 + y_1^2$. Analizzando di nuovo la divisibilità per 3, si ottiene che anche x_1 e y_1 devono essere divisibili per 3, e dunque l'equazione può essere nuovamente semplificata dividendo per 9. Procedendo in questo modo, si arriverà al punto in cui l'equazione si riduce alla forma

$$3 \cdot 668^{2005} = x_n^2 + y_n^2.$$

Ma di nuovo, questa equazione è possibile solo se x_n e y_n sono divisibili per 3, e quindi $x_n^2 + y_n^2$ è divisibile per 9. Poiché però $3 \cdot 668^{2005}$ non è divisibile per 9, una tale equazione non ha soluzioni.

4. Antonio e Bernardo giocano al seguente gioco: sono date due pile di gettoni, una con m gettoni e l'altra con n gettoni. Ogni giocatore sceglie a turno una delle seguenti mosse:

   - prendere un gettone da una delle pile;
   - prendere un gettone da ciascuna delle pile;
   - spostare un gettone da una pila ad un'altra.

   Perde chi non può più muovere. Comincia Antonio. Determinare, in funzione di m ed n, se uno dei due giocatori ha una strategia vincente, e in caso affermativo specificare di quale giocatore si tratta.

   SOLUZIONE:
   Se almeno uno tra m ed n è dispari dispari vince Antonio, se sono entrambi pari vince Bernardo.

   Evidentemente l'unica configurazione in cui non sono più possibili mosse è quella in cui entrambe le pile sono vuote. In particolare, entrambe le pile avranno in quel momento un numero pari di gettoni. L'idea è dunque cercare di far rimanere dopo la propria mossa un numero pari di pedine in entrambe le pile.

   Se nello stato iniziale esattamente una pila ha un numero dispari di pedine, Antonio prede una pedina da quella pila. Se entrambe le pile hanno un numero dispari di pedine, prende una pedina da ciascuna pila. In entrambi i casi lascia a Bernardo un numero pari di pedine in entrambe le pile; d'altra parte, ogni mossa successiva di Bernardo lascia almeno una pila con un numero dispari di pedine, permettendo ad Antonio di ripetere la sua strategia. Poiché infine ogni mossa di Antonio toglie qualche pedina, il gioco terminerà in un numero finito di passi con la vittoria di Antonio.

   Se invece entrambe le pile hanno un numero pari di pedine, la situazione è simmetrica alla precedente: dopo qualsiasi mossa di Antonio ci sarà un numero dispari di pedine in almeno una delle pile, e quindi Bernardo potrà applicare la stassa strategia di Antonio nel caso precedente.

5. Determinare se il seguente enunciato è vero o falso:
   "Per ogni successione $x_1, x_2, x_3, ...$ di numeri reali maggiori o uguali a zero esistono due successioni $a_1, a_2, a_3, ...$ e $b_1, b_2, b_3, ...$ di numeri reali maggiori o uguali a zero tali che

   - $x_n = a_n + b_n$ per ogni n;
   - $a_1 + ... + a_n \leq n$ per infiniti valori di n;
   - $b_1 + ... + b_n \leq n$ per infiniti valori di n, eventualmente diversi dai precedenti."

   SOLUZIONE:
   L'enunciato è vero. Per dimostrarlo, indichiamo innanzitutto una strategia possibile.

   Fissata una successione di numeri interi $0 < n_1 < n_2 < ...$, dividiamo gli indici in intervalli disgiunti: il primo intervallo comprende gli indici $1, ..., n_1$, il secondo gli indici $n_1 + 1, ..., n_2$, il terzo gli indici $n_2 + 1, ..., n_3$ e così via. Poniamo ora $a_i = x_i$ se i appartiene ad un intervallo pari (secondo, quarto, ...), e $a_i = 0$ altrimenti; simmetricamente, poniamo $b_i = x_i$ se i appartiene ad un intervallo dispari e $b_i = 0$ altrimenti. In questo modo è evidente che per ogni n si ha che uno tra a_n e b_n coincide con x_n, mentre l'altro è uguale a zero, e quindi $x_n = a_n + b_n$ per ogni n. Mostriamo ora che, scegliendo opportunamente la successione $0 < n_1 < n_2 < ...$, si può fare in modo che ci siano infiniti valori di n per cui $a_1 + ... + a_n \leq n$ ed infiniti valori di n per cui $b_1 + ... + b_n \leq n$.

   Poniamo infatti $n_1 = 1$: di conseguenza il primo intervallo è costituito dal solo indice 1 e quindi $b_1 = x_1$, $a_1 = 0$. In particolare la prima disuguaglianza ($a_{n_1} \leq n_1$) è verificata.

   Vogliamo ora scegliere n_2 in modo da verificare la seconda disuguaglianza ($b_1+b_2+...+b_{n_2} \leq n_2$). A tal fine, osserviamo che da 2 a n_2 siamo nel secondo intervallo di indici, e dunque tutti i b_i corrispondenti sono nulli: la seconda disuguaglianza si riduce quindi a $b_1 \leq n_2$ e sarà dunque verificata a patto di prendere un n_2 abbastanza grande (possiamo ad esempio prendere il più piccolo intero maggiore di $n_1 = 1$ e di b_1).

   Passiamo ora a scegliere n_3 in modo da verificare la terza disuguaglianza ($a_1 + a_2 + ... + a_{n_3} \leq n_3$). A tal fine, osserviamo che da $n_2 + 1$ a n_3 siamo nel terzo intervallo di indici, e dunque tutti gli a_i

corrispondenti sono nulli: la terza disuguaglianza si riduce quindi a $a_1+a_2+...+a_{n_2} \leq n_3$, espressione nella quale n_3 compare solo a destra, e che sarà dunque verificata pur di prendere n_3 abbastanza grande (possiamo ad esempio prendere il più piccolo intero maggiore di n_2 e di $a_1 + a_2 + ... + a_{n_2}$).

Procediamo analogamente per scegliere $n_4, n_5, ...$

Questo tipo di costruzione può essere portato avanti ricorsivamente. Diamo qui una versione matematicamente rigorosa dell'idea sopra esposta.

Dimostrazione dell'enunciato. Data una qualsiasi successione di numeri maggiori o uguali a zero $x_1, x_2, x_3, \ldots$, definiamo una successione di numeri interi $0 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ e le successioni $a_1, a_2, a_3 \ldots$, $b_1, b_2, b_3 \ldots$ come segue.

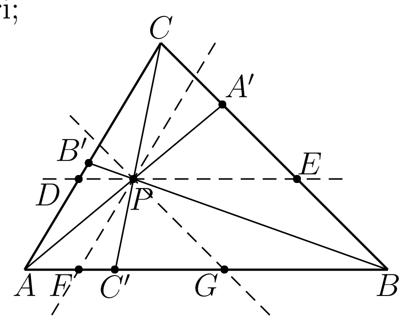
- $n_1 = 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = x_1$;
- definiamo n_2 come il più piccolo intero maggiore di $n_1 = 1$ tale che $b_1 = x_1 \leq n_2$; per $i = 2, \ldots n_2$ poniamo $a_i = x_i$, $b_i = 0$.

Supponiamo ora di avere definito $n_1, \ldots, n_k$ e a_i, b_i per $i = 1, \ldots n_k$.

- se $k = 2h$ è pari, definiamo n_{2h+1} come il più piccolo intero positivo maggiore di n_{2h} tale che $a_1 + \cdots + a_{2h} \leq n_{2h+1}$; per $i = n_{2h} + 1, \ldots, n_{2h+1}$ poniamo $a_i = 0$, $b_i = x_i$;
- se $k = 2h + 1$ è dispari, definiamo n_{2h+2} come il più piccolo intero positivo maggiore di n_{2h+1} tale che $b_1 + \cdots + b_{2h+1} \leq n_{2h+2}$; per $i = n_{2h+1} + 1, \ldots, n_{2h+2}$ poniamo $a_i = x_i$, $b_i = 0$.

Dalla costruzione è chiaro che $a_i + b_i = x_i$ per ogni i e che

$$\begin{aligned} a_1 + \cdots + a_{n_k} &\leq n_k \qquad \text{se } k \text{ è dispari;} \\ b_1 + \cdots + b_{n_k} &\leq n_k \qquad \text{se } k \text{ è pari.} \end{aligned}$$



6. Sia P un punto interno ad un triangolo ABC. Le rette AP, BP e CP intersecano i lati di ABC in A', B' e C' rispettivamente. Ponendo
$$x = \frac{AP}{PA'}, \quad y = \frac{BP}{PB'}, \quad z = \frac{CP}{PC'},$$
dimostrare che $xyz = x + y + z + 2$.

SOLUZIONE:

Si verifica facilmente che, comunque scelti tre numeri reali non nulli a, b, c, e ponendo $x = \dfrac{a+b}{c}$, $y = \dfrac{b+c}{a}$ e $z = \dfrac{a+c}{b}$, la relazione da dimostrare diventa un'identità algebrica. Per trovare a, b, c si proceda come segue: siano D ed E le intersezioni della parallela ad AB passante per P con i segmenti AC e BC rispettivamente. Siano poi F e G le intersezioni di AB con le parallele per P ai segmenti AC e BC rispettivamente, e si ponga $AF = a$, $FG = b$, $GB = c$. I triangoli DEC e FGP sono simili, poiché hanno i lati ordinatamente paralleli, ed inoltre valgono le relazioni $DP = a$, $PE = c$ e $DA = PF$, in quanto $AFPD$ e $GBEP$ sono dei parallelogrammi. Applicando il teorema di Talete alle parallele GP e BA' segue che $x = \dfrac{a+b}{c}$, ed analogamente segue che $y = \dfrac{b+c}{a}$, applicando lo stesso teorema alle parallele FP ed AB'. Ancora per il teorema di Talete, si ha $z = \dfrac{CD}{DA}$, da cui $z = \dfrac{CD}{PF} = \dfrac{DE}{FG}$, sfruttando la similitudine tra DEC e FGP. Dunque, $z = \dfrac{DP+PE}{FG} = \dfrac{a+c}{b}$, e questo conclude la dimostrazione.