XXI Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico, 6 maggio 2005

1. Sia ABC un triangolo rettangolo, con ipotenusa AC, e sia H il piede dell'altezza condotta da B ad AC. Sapendo che le lunghezze AB, BC e BH costituiscono i lati di un nuovo triangolo rettangolo, determinare i possibili valori di $\dfrac{AH}{CH}$.

Soluzione: Poiché i triangoli ABH e BCH sono rettangoli, si ha $BH < AB$ e $BH < HC$. Dunque il lato maggiore fra AB e BC deve essere l'ipotenusa del nuovo triangolo rettangolo. Supponiamo dapprima $BC > AB$. Allora abbiamo $AB^2+BH^2 = BC^2$ e, analizzando il triangolo rettangolo BCH, $CH^2+BH^2 = BC^2$. Ne segue che $AB = CH$. Dalla similitudine fra i triangoli AHB e ABC si ha che $AB : AH = (AH+CH) : AB$ e quindi $CH : AH = (AH+CH) : CH$. Detto x il rapporto cercato, si trova $1/x = x+1$ da cui $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (il valore negativo della soluzione dell'equazione algebrica è da scartare). Se $AB > BC$, lo stesso ragionamento prova che $CH/AH = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ossia $AH/CH = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

2. Dimostrare che, comunque si prendano 18 numeri interi positivi consecutivi minori o uguali a 2005, ce ne è almeno uno divisibile per la somma delle sue cifre.

Soluzione: Tra i 18 numeri considerati vi sono due multipli consecutivi di 9. Per il criterio di divisibilità per 9 la somma delle cifre di questi numeri è multipla di 9. Considerando che la somma massima delle cifre di un numero minore di 2005 è 28 (nel caso di 1999), analizziamo due casi.

Se la somma delle cifre di uno di questi numeri è 27, allora questo numero deve essere necessariamente 999, 1899, 1989 o 1998. I numeri 999 e 1998 sono divisibili per 27, mentre i multipli di 9 immediatamente precedenti e immediatamente successivi a 1899 e a 1989, cioè 1890, 1908, 1980 e 1998, sono tutti divisibili per la somma delle loro cifre. Se invece le somme delle cifre dei due multipli consecutivi di 9 sono uguali a 9 o a 18, allora basta notare che uno di essi è pari, e quindi divisibile non solo per 9 ma anche per 2, e quindi per 18.

3. In ciascuna delle caselle di una tabella quadrata 4×4 è scritta la cifra 1 o la cifra 2. Si sa che la somma delle 9 cifre contenute in ciascuno dei 4 quadrati 3×3 contenuti nella tabella è multipla di 4, mentre la somma di tutte le 16 cifre non è multipla di 4.
Determinare il massimo ed il minimo valore possibile per la somma di tutte le 16 cifre.

Soluzione: Il massimo ed il minimo sono, rispettivamente, 30 e 19 e sono realizzati, per esempio, dalle seguenti tabelle

2	2	2	2
2	2	1	2
2	1	2	2
2	2	2	2

1	1	1	1
1	2	2	1
1	2	1	1
1	1	1	1

Infatti, affinché la somma delle 9 cifre in un quadrato 3×3 sia divisibile per 4, ci sono solo due possibilità: avere 6 volte la cifra 1 e 3 volte la cifra 2 (somma 12), oppure avere 2 volte la cifra 1 e 7 volte la cifra 2 (somma 16).

È quindi evidente che nella tabella 4×4 ci sono almeno 2 cifre 1. Se le disponiamo, in qualunque modo, all'interno del quadrato centrale 2×2 della tabella, in modo cioè da essere contenute in tutti i 4 quadrati 3×3, non sono necessarie altre cifre 1. La somma massima si realizza quindi con 2 cifre 1 e 14 cifre 2, per un totale di 30.

Analogamente, nella tabella 4×4 ci sono almeno 3 cifre 2, e non ne servono altre se queste vengono disposte, in qualunque modo, all'interno del quadrato centrale 2×2 della tabella. La somma minima si realizza quindi con 3 cifre 2 e 13 cifre 1, per un totale di 19.

4. Determinare per quali $n \geq 3$ è possibile trovare n numeri interi positivi tali che a due a due abbiano almeno un fattore in comune diverso da 1, ma a tre a tre siano primi tra loro.

Se si aggiunge la condizione che tutti i numeri interi siano minori di 5000, qual è il massimo valore di n possibile?

Soluzione: È possibile per tutti gli interi positivi $n \geq 3$. Si associ ad ogni coppia di interi $\{i, j\}$ con $1 \leq i < j \leq n$ un numero primo $p_{ij} = p_{ji}$ in modo tale che a coppie distinte siano associati primi distinti.

Si definisca poi, per $1 \leq i \leq n$, a_i come il prodotto di tutti i numeri primi p_{ij} con i fissato e j variabile fra tutti i numeri da 1 a n diversi da i. Allora i numeri a_i soddisfano le proprietà richieste. Infatti, il numero primo p_{ij} divide solo a_i ed a_j e pertanto il massimo comune divisore fra a_i ed a_j è uguale a p_{ij}, mentre non c'è nessun numero primo che divida tre dei numeri $a_1, \ldots, a_n$.

La risposta alla seconda domanda è 4. Per $n = 4$ si possono prendere i numeri $a_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $a_2 = 2 \cdot 7 \cdot 11$, $a_3 = 3 \cdot 7 \cdot 13$, $a_4 = 5 \cdot 11 \cdot 13$. Per $n = 5$, invece, non è possibile, e a maggior ragione non è possibile per $n > 5$. Infatti, se $a_1, \ldots, a_5$ soddisfacessero le condizioni date, allora per ogni coppia $\{a_i, a_j\}$ ci sarebbe un numero primo p_{ij} che divide sia a_i che a_j, e tutti questi numeri primi dovrebbero essere distinti. Pertanto ogni numero dovrebbe essere divisibile per almeno 4 numeri primi distinti, ed ogni numero primo dovrebbe dividere al più due dei numeri a_i. In particolare, il numero primo 2 e il numero primo 3 potrebbero dividere ciascuno al massimo 2 dei numeri a_i, quindi almeno uno degli a_i non sarebbe divisibile né per 2 né per 3. Tale numero, essendo il prodotto di almeno quattro numeri primi distinti, dovrebbe essere maggiore o uguale a $5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 5005$, contraddicendo l'ipotesi.

5. Sia h un numero intero positivo e sia a_n la successione definita per ricorrenza nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_{n+1} &= \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & \text{se } a_n \text{ è pari,} \\ a_n + h & \text{se } a_n \text{ è dispari.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

(Ad esempio, se $h = 27$ si ha: $a_1 = 28$, $a_2 = 14$, $a_3 = 7$, $a_4 = 34$, $a_5 = 17$, $a_6 = 44$, ...)

Per quali valori di h esiste $n > 0$ per cui $a_n = 1$?

Soluzione: I valori cercati sono tutti e soli gli interi positivi dispari. Infatti, se h è pari, allora $a_1 = 1 + h$ è dispari, quindi $a_2 = 1 + 2h$ è dispari e così via, quindi tutti i numeri $a_n = 1 + nh$ sono dispari e maggiori di 1.

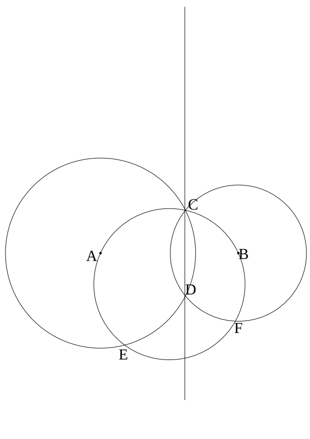
Se invece h è dispari, osserviamo che tutti i termini della successione sono o interi positivi minori o uguali ad h oppure interi positivi pari maggiori di h e minori o uguali di $2h$. Una dimostrazione semplice di questo fatto si può ottenere utilizzando il principio di induzione. Come dato iniziale, si ha che $a_0 = 1$, quindi è un intero positivo minore o uguale ad h. Supposto che la tesi sia vera per il numero a_n, dimostriamola per a_{n+1}: se a_n è dispari e minore o uguale ad h, allora $a_{n+1} = a_n + h$ è pari, maggiore di h e minore o uguale a $2h$; se invece a_n è pari e $a_n \leq 2h$, allora $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} \leq h$.

Ne segue che la successione dei numeri a_n può assumere solo un numero finito di valori. Poiché la successione è infinita, esisteranno due indici $r < s$ tali che $a_r = a_s$. Supponiamo di scegliere due indici $r < s$ tali che $a_r = a_s$ e dove r è minimo possibile. Se $r = 0$, allora $a_s = a_0 = 1$ e la tesi è dimostrata. Dimostriamo per assurdo che non può essere $r > 0$, distinguendo due casi:

- $a_r \leq h$; allora non si può avere $a_r = a_{r-1} + h$ o $a_s = a_{s-1} + h$, perché in tal caso a_{r-1} o a_{s-1} non sarebbero positivi, contro quanto affermato precedentemente. Pertanto $a_{r-1} = a_{s-1} = 2a_r$ e dunque si ha un'uguaglianza fra due termini della successione in cui il primo termine ha un indice minore di r, assurdo;

- a_r pari, $h < a_r \leq 2h$; allora non si può avere $a_r = \frac{a_{r-1}}{2}$ o $a_s = \frac{a_{s-1}}{2}$, perché altrimenti $a_{r-1} > 2h$ o $a_{s-1} > 2h$, contro quanto affermato precedentemente. Pertanto $a_{r-1} = a_{s-1} = a_r - h$, e di nuovo si ha l'assurdo di un'uguaglianza fra due termini della successione in cui il primo termine ha un indice minore di r.

6. Siano date nel piano due circonferenze γ_1 e γ_2 di centri A e B rispettivamente, e intersecantesi in due punti C e D. Si supponga che la circonferenza passante per A, B e C intersechi ulteriormente γ_1 e γ_2 in E ed F rispettivamente, e che l'arco EF non contenente C giaccia fuori dai due cerchi delimitati da γ_1 e γ_2. Dimostrare che l'arco EF non contenente C è bisecato dalla retta CD.



Soluzione: Per il teorema dell'angolo al centro, $\widehat{CAD} = 2\widehat{CED}$. Poiché per simmetria $\widehat{CAB} = \widehat{DAB}$, si ha $\widehat{CAB} = \widehat{CED}$. Inoltre, $\widehat{CAB} = \widehat{CEB}$, perché entrambi insistono sull'arco CB, e quindi $\widehat{CED} = \widehat{CEB}$. Ne segue che E, D e B sono allineati (perché D e B giacciono dalla stessa parte della retta CE). Siccome gli archi CB e BF sono uguali, si ha $\widehat{CEB} = \widehat{BEF}$, quindi D appartiene alla bisettrice di $\widehat{CEF}$. Con un ragionamento analogo, si dimostra che D appartiene alla bisettrice di $\widehat{CFE}$, il che significa che D è l'incentro del triangolo CEF. Dunque la retta CD biseca l'angolo $\widehat{ECF}$, e quindi l'arco EF.