

VII GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale A – 5 maggio 2006

Istruzioni Generali

- ★ Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- ★ Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.

Scadenze importanti

- ★ **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- ★ **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo.
- ★ **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Alla lezione di divinazione

Hardy e Ron sono stati di nuovo pizzicati a chiacchierare durante la noiosa lezione di divinazione. Per punizione devono risolvere un esercizio: data la sequenza 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, ..., formata da tutti gli interi positivi che non sono né quadrati né cubi di altri interi, vaticinare il 2006-esimo termine.

2. La prima prova del torneo

Finalmente è giunto il gran giorno del torneo TreAngoli, che mette a confronto i migliori studenti di matematica. Ecco la prima prova: trovare quante sono le coppie (a, b) di interi positivi tali che $a \leq 222$ e $\frac{a}{2} < b < \frac{2}{3}a$.

3. La costruzione del malandrino

L'unico modo per rendere visibile ciò che è stato scritto sulla costruzione del malandrino consiste nel risolvere un problema geomantico: in un triangolo ABC le lunghezze dei lati uscenti da A sono 1358 e 2006, e la mediana uscente da A ha lunghezza 1358. Qual è la lunghezza di BC ?

4. Successioni

Per una strana, matematica coincidenza, nel Medio Evo il direttore della Scuola Matematica Superiore è stato nominato solo negli anni con la seguente peculiare proprietà: sono stati tutti gli anni N tra il 476 e il 1492 per cui l'equazione $x^4 - y^4 = N$ ha soluzione negli interi positivi. Qual è la somma di questi anni?

5. Distrazioni

Henri e Smale Perelman, i due fratelli più grandi di Ron, raramente seguono le lezioni e piuttosto si dedicano a inventare nuovi giochi. Oggi giocano a chi indovina per primo il seguente quesito: dire quante sono le frazioni $\frac{m}{n}$, ridotte ai minimi termini, tali che $0 < \frac{m}{n} < 1$ e per cui $m \cdot n = 20!$.

6. Selezione della rosa

Il Quamditch è uno sport che coniuga scatto, agilità e potenza tanto di pensiero che di azione. Per questo Hardy, capitano della squadra di Quamditch della casa di *Rapportareo*, sottopone gli aspiranti matematici atleti alla seguente prova: mentre eseguono una tripla capriola carpiata, devono considerare tutte le coppie ordinate di interi positivi (a, b) tali che $a^2 + b^2 = 1105$. Qual è la somma dei diversi valori di a ?

7. La pozione Polifattore

La preparazione di certe pozioni è lunga ed elaborata, impresa solo per matematici esperti. L'abile Hermita è intenta a preparare la pozione Polifattore: essa richiede un certo numero di sanguisughe. Tale numero P è il prodotto di tutti i divisori positivi di 1 500 000 (incluso lo stesso 1 500 000). Con quanti zeri termina P ?

8. Impostori svelati

Spesso ci si chiede come sia possibile riconoscere un matemago da un *matebbano*, cioè qualcuno a digiuno di matematica. Il metodo è molto semplice! Provate a chiedere a un matebbano il seguente quesito.

In un triangolo ABC , retto in A , siano $AB = 7$ e $AC = 24$. Sia P l'intersezione tra l'altezza da A e la mediana da B . Determinare AP . Rispondere con la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

9. La giratempo

La valente Hermita è piuttosto confusa dall'uso della *Giratempo*, che le permette di viaggiare nel tempo. Dunque si ritrova costretta a tenere spesso d'occhio l'orologio. Sia N il numero di volte che, in una settimana, la lancetta dei secondi sorpassa la lancetta dei minuti. Quanto vale N ?

10. Alla lezione di geomanzia

Hardy e Hermita sono nel laboratorio di geomanzia, per esercitarsi a creare simboli magici. Partendo da una circonferenza su cui segnano sei punti equidistanti, Hermita propone di completare la figura unendo i sei punti a formare una stella di David, di area A . Hardy invece propone di unirli ad esagono, di area B . Per misurare la potenza dei due incantesimi, i due misurano le due aree. Dire quanto vale $360B/A$.

11. La seconda prova del torneo

I concorrenti al temibile torneo TreAngoli che hanno superato la prima prova si trovano ora ad affrontare la seconda. Devono trovare il più piccolo numero N di esattamente 4 cifre tale per cui, sommando il numero ottenuto considerando le sole ultime quattro cifre di N^2 al numero iniziale N , si ottenga 10000.

12. Agognata libertà

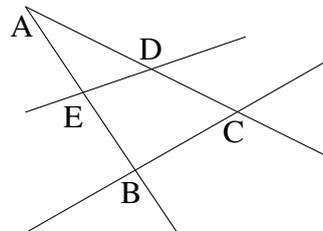
Come tutti i matemaghi sanno, un alfo domestico può riconquistare la sua libertà se riesce a risolvere un problema che gli pone il suo padrone. Recentemente un alfo si è visto chiedere qual è il più piccolo numero intero di 4 cifre distinte e non nulle tale che ogni sua cifra (ad eccezione della prima e dell'ultima) sia strettamente maggiore della media aritmetica delle due cifre adiacenti.

Qual è la risposta che restituisce la libertà all'alfò?

13. La capanna del guardacaccia

Hardy, Ron e Hermita amano trascorrere il pomeriggio davanti a una tazza fumante di tè in compagnia del guardacaccia. In queste occasioni la meticolosa Hermita ha sempre un nuovo problema di geomanzia, la sua materia preferita, da proporre agli amici.

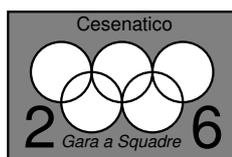
I punti B, C, D, E giacciono sulla stessa circonferenza e sia A l'intersezione tra la retta BE e la retta CD (vedere figura). Sappiamo che $DE = AE$ e che $\widehat{ACB} = 40^\circ$. Determinare \widehat{DAE} .

**14. Il collezionista**

Il professor Primon fa una strana collezione di manufatti di matematica oscura. Si tratta di tetraedri regolari che hanno facce tutte colorate di un solo colore (diverso per ogni faccia), e i colori vengono scelti da una gamma di 20 colori diversi. Il professor Primon possiede già un elemento di questa collezione e ne compra un altro, poi torna a casa lo capovolge, lo ruota sulla base, e si accorge che in realtà è un doppione. Quanti pezzi conta in totale la collezione (due pezzi ottenibili l'uno dall'altro mediante rotazioni, sono da considerarsi lo stesso)?

15. L'ultima prova del torneo

La fine del torneo TreAngoli è vicina, e presto si saprà il nome del matemago supremo, colui che sarà ricordato per le ere a venire. Solo un prova separa Hardy dal meritato trionfo: determinare quanto vale la somma dei quadrati delle radici del polinomio $x^3 - 46x^2 + 55x - 7$.



VII GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale A – SOLUZIONI – 5 maggio 2006

Nr.	Problema	Soluzione
1	Alla lezione di divinazione	2060
2	La prima prova del torneo	4033
3	La costruzione del malandrino	2088
4	Successioni	8383
5	Distrazioni	0128
6	Selezione della rosa	0168
7	La pozione Polifattore	0210
8	Impostori svelati	2437
9	La giratempo	9912
10	Alla lezione di geomanzia	0540
11	La seconda prova del torneo	9375
12	Agognata libertà	1342
13	La capanna del guardacaccia	0070
14	Il collezionista	9690
15	L'ultima prova del torneo	2006