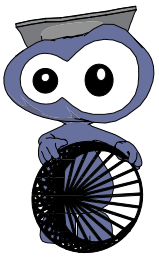


XXIII OLIMPIADE ITALIANA DI MATEMATICA

Cesenatico, 11 maggio 2007

SOLUZIONI

1. Sia dato nel piano un esagono regolare. Per ogni punto P del piano, chiamiamo $l(P)$ la somma delle sei distanze tra P e le rette su cui giacciono i *lati* dell'esagono, e $v(P)$ la somma delle sei distanze di P dai *vertici* dell'esagono.

(a) Per quali punti P del piano $l(P)$ è minima?

(b) Per quali punti P del piano $v(P)$ è minima?

SOLUZIONE: (a) I punti P per cui $l(P)$ è minima sono i punti interni all'esagono e quelli sul suo bordo.

Chiamiamo $ABCDEF$ l'esagono, e a la lunghezza del suo lato e consideriamo la somma delle distanze tra P e i due lati opposti AB e DE. Se H e K sono i piedi delle perpendicolari da P alle rette AB e DE rispettivamente, allora, per definizione, PH e PK sono le distanze di P dalle rette AB e DE. P, H e K sono allineati, perché PH e PK sono entrambi perpendicolari alle due rette, ed HK è uguale alla distanza tra le due rette, cioè a $\sqrt{3}a$.

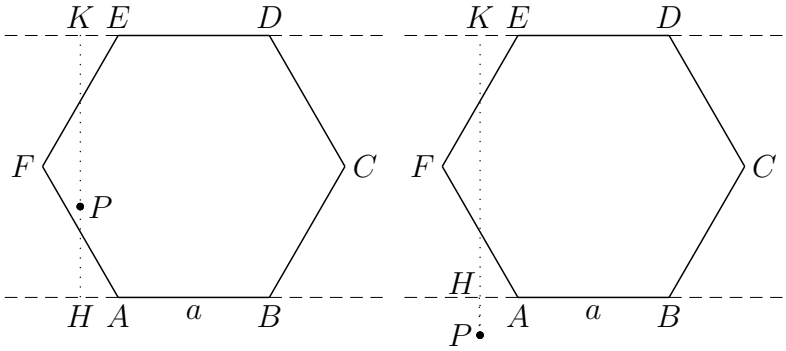
Se P è interno al segmento HK (vertici inclusi) si ha $HP + PK = HK = \sqrt{3}a$. Se invece è esterno, allora il più lungo dei due segmenti PH e PK contiene al suo interno tutto il segmento HK, quindi in particolare $PH + PK > HK > \sqrt{3}a$. È evidente che il primo caso si presenta quando P è interno alla striscia formata tra le due rette AB e DE (bordo incluso), mentre il secondo quando P è esterno a tale striscia. In conclusione,

$$\operatorname{dist}(P, AB) + \operatorname{dist}(P, DE) = PH + PK \geqslant \sqrt{3}a,$$

e l'uguaglianza vale se e solo se P è interno della striscia (bordo incluso). Ripetendo il ragionamento sulle altre due coppie di lati opposti, abbiamo

$$\operatorname{dist}(P, AB) + \operatorname{dist}(P, DE) \geqslant \sqrt{3}a,$$
$$\operatorname{dist}(P, BC) + \operatorname{dist}(P, EF) \geqslant \sqrt{3}a,$$
$$\operatorname{dist}(P, CD) + \operatorname{dist}(P, FA) \geqslant \sqrt{3}a,$$

e le uguaglianze valgono rispettivamente se P è interno alle tre strisce determinate dalle coppie di rette parallele $\{AB, DE\}$, $\{BC, EF\}$, $\{CD, FA\}$ (bordi inclusi).



Sommando le tre relazioni trovate, otteniamo

$$\operatorname{dist}(P, AB) + \operatorname{dist}(P, BC) + \operatorname{dist}(P, CD) + \operatorname{dist}(P, DE) + \operatorname{dist}(P, EF) + \operatorname{dist}(P, FA) \geqslant 3\sqrt{3}a.$$

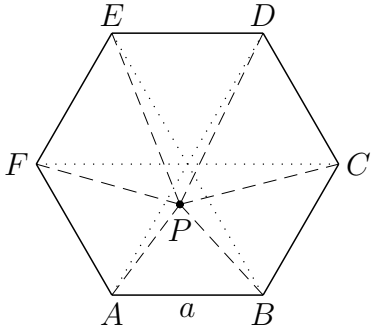
L'uguaglianza vale quando P è nell'intersezione delle tre strisce formate dalle coppie di lati opposti dell'esagono, cioè quando P è all'interno all'esagono o sul suo bordo.

(b) L'unico punto per cui $v(P)$ è minima è il centro dell'esagono.

Per dimostrarlo, consideriamo le somme delle distanze di P dalle coppie di vertici opposti $\{A, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, F\}$). Per la disuguaglianza triangolare, $AD \leqslant AP + PD$, e l'uguaglianza vale se e solo se P è sul segmento AD. Analogamente, $BE \leqslant BP + PE$, con l'uguaglianza solo se P sta sul segmento BE, e $CF \leqslant CP + PF$, con l'uguaglianza solo se P sta sul segmento CF. Sommando le tre relazioni otteniamo

$$\begin{aligned} v &= PA + PB + PC + PD + PE + PF \\ &= (AP + PD) + (BP + PE) + (CP + PF) \leqslant AD + BE + CF = 6a, \end{aligned}$$

e l'uguaglianza vale se e solo se valgono contemporaneamente le condizioni di uguaglianza delle tre relazioni che abbiamo sommato, cioè se P sta contemporaneamente sui segmenti AD, BE e CF. È evidente che l'unico punto che soddisfa questa condizione è il centro dell'esagono.



2. Diciamo che due polinomi a coefficienti interi p e q sono *simili* se hanno lo stesso grado e gli stessi coefficienti a meno dell'ordine.

(a) Dimostrare che se p e q sono simili, allora $p(2007) - q(2007)$ è un multiplo di 2.

(b) Esistono degli interi $k > 2$ tali che, comunque siano dati due polinomi simili p e q, $p(2007) - q(2007)$ è un multiplo di k?

SOLUZIONE: (a) Poiché 2007 è un numero dispari, il valore di un polinomio in 2007 è pari o dispari a seconda che il numero dei suoi coefficienti dispari sia pari o dispari. Ma se p e q sono simili, allora in particolare contengono lo stesso numero di coefficienti dispari, e quindi $p(2007)$ e $q(2007)$ sono entrambi pari o entrambi dispari. In ogni caso, la loro differenza è divisibile per 2.

(b) Sì, la cosa è vera anche per $k = 2006$.

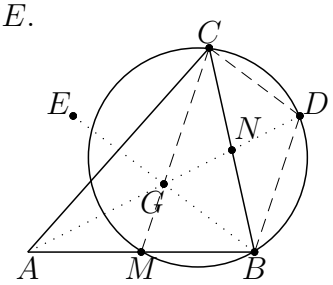
Per ogni intero non negativo h, si ha $2007^h \equiv 1 \pmod{2006}$. Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ e $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$ si ha dunque

$$p(2007) \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0 \pmod{2006}$$
$$q(2007) \equiv b_n + b_{n-1} + \cdots + b_0 \pmod{2006},$$

da cui $p(2007) - q(2007) \equiv (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0) - (b_n + b_{n-1} + \cdots + b_0) = 0 \pmod{2006}$.

SOLUZIONE ALTERNATIVA: Entrambi i casi (a) e (b) possono essere risolti nel modo seguente. Notiamo che se p e q sono simili necessariamente $p(1) = q(1)$. Sia ora $r(x) = p(x) - q(x)$; si ha $r(1) = 0$, quindi $(x - 1)$ divide $r(x)$. Ma allora $2006 = 2007 - 1$ divide $r(2007) = p(2007) - q(2007)$.

3. Sia ABC un triangolo con baricentro G. Sia $D \neq A$ un punto sulla retta AG tale che $AG = GD$, e sia $E \neq B$ un punto sulla retta GB tale che $GB = GE$. Sia infine M il punto medio di AB. Dimostrare che il quadrilatero $BMCD$ è inscrittibile in una circonferenza se e solo se $BA = BE$.



SOLUZIONE: Sia N il punto medio di BC. N è anche punto medio di GD, essendo $GD = AG$ per ipotesi, e $GN = \frac{1}{2}AG$ per le note proprietà del baricentro. Allora $BDCG$ è un parallelogramma, avendo le diagonali che si bisecano, e $BDCM$ è un trapezio, con basi BD e CM. Un trapezio è inscrittibile in una circonferenza se e solo se è isoscele. Poiché $BDCG$ è un parallelogramma, si ha $DC = BG$; quindi $BDCM$ è inscrittibile se e solo se $BM = BG$.
Per ipotesi M è il punto medio di AB e G è il punto medio di BE, quindi $BM = BG$ se e solo se $BA = BE$; ciò conclude la dimostrazione.

4. Alberto, per festeggiare il compleanno di Barbara, propone di giocare al seguente gioco: dato l'insieme dei numeri $0, 1, \ldots, 1024$, Barbara rimuove da questo insieme 2^9 numeri. Al passaggio successivo Alberto rimuove dai rimanenti 2^8 numeri. Tocca nuovamente a Barbara, che dai restanti ne rimuove 2^7 eccetera, fino a che non rimangono solo 2 numeri a e b. Alberto a questo punto deve pagare a Barbara $|a - b|$ euro.

Determinare la massima quantità di euro che Barbara è sicura di poter incassare, *indipendentemente* dalla strategia adottata da Alberto.

SOLUZIONE: La massima somma che Barbara è sicura di incassare è di 32 euro.

Ad ogni mossa, Barbara può almeno raddoppiare la minima distanza tra i numeri rimamenti. Infatti, alla prima mossa può rimuovere tutti i numeri dispari, e alle successive, indipendentemente dalle mosse di Alberto, può rimuovere, il 2^o, il 4^o, il 6^o, ... dei numeri rimasti secondo l'ordine crescente. Dopo le sue 5 mosse, la minima distanza fra i numeri rimasti sarà di almeno $2^5 = 32$.

D'altra parte, Alberto può ad ogni mossa almeno dimezzare la distanza massima fra i numeri rimanenti. Infatti, dopo la prima mossa di Barbara rimarranno $2^{10} + 1 - 2^9 = 2^9 + 1$ numeri; di essi, necessariamente o fra quelli minori di 2^9 o fra quelli maggiori di 2^9 non ce ne saranno più di 2^8. Alberto potrà quindi togliere i rimannenti, facendo in modo che rimangano solo numeri nell'intervallo $[0, 2^9]$ o solo numeri nell'intervallo $[2^9, 2^{10}]$. Prima della mossa successiva di Alberto, saranno già stati rimossi $2^9 + 2^8 + 2^7$ numeri, e quindi ne rimarranno $2^7 + 1$, inclusi in un intervallo di lunghezza 2^9. Di conseguenza, o nella prima metà o

nella seconda metà dell'intervallo rimasto (escludendo il numero centrale), non ne rimarranno più di 2^6, e quindi Alberto potrà rimuoverli tutti, lasciando solo numeri in un intervallo di lunghezza 2^8. Proseguendo con questa strategia fino alla sua quinta ed ultima mossa, Alberto potrà fare in modo di lasciare solo due numeri in un intervallo di lunghezza $2^5 = 32$, e quindi con distanza non superiore a 32.

In conclusione, Barbara è sicura di guadagnare almeno 32 euro, Alberto è sicuro di non dover sborsare più di 32 euro, e quindi 32 euro è la massima somma che Barbara è sicura di incassare.

5. Sia data la successione

$$\begin{cases} x_1 = 2; \\ x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 \quad \text{per } n \geq 1. \end{cases}$$

Dimostrare che n e x_n sono relativamente primi per ogni $n \geq 1$.

SOLUZIONE: Dimostriamo che, se p è un numero primo che divide x_n, allora p non divide n.

Se $p = 2$, allora la tesi è banalmente vera, in quanto tutti i termini x_n sono dispari per $n > 1$. Quindi si ha che 2 divide x_n se e solo se $n = 1$.

Supponiamo dunque $p > 2$. Chiamiamo k il più piccolo intero positivo tale che p divida x_k. La successione r_n dei resti di x_n nella divisione per p ammette un numero finito di valori (compresi fra 0 e $p-1$), dunque esisteranno due interi $i < j$ tali che $r_i = r_j$. Per ogni $m \geq 0$ si avrà che $r_{i+m} = r_{j+m}$, quindi la successione r_n è periodica per $n \geq i$; ne segue che il valore $r_k = 0$ (p divide x_k) si deve ottenere prima che ci siano due termini della successione r_n ripetuti. Inoltre, se $n < k$, allora $r_n \neq p - 1$, perché altrimenti $r_{n+1} = r_{n+2} = r_{n+3} = \cdots = 1$, e quindi r_n non sarebbe mai zero. Quindi si deve avere $r_k = 0$ per qualche $k \leq p - 1$. Ma se $r_k = 0$, allora $r_{k+1} = p - 1$ e $r_n = 1$ per ogni $n > k + 1$, e dunque x_k è l'*unico* termine della successione divisibile per p. Poiché p non divide nessuno dei numeri $1, 2, \ldots, p - 1$, p non può dividere k.

NOTA: In alternativa ad escludere che r_n possa essere uguale a $p - 1$ per $p > 2$ ed $n < k$, si può notare che i resti possibili sono non più dei resti dei quadrati (infatti devono essere uguali a 2 volte il resto di un quadrato meno uno). Poiché per $1 \leq x \leq \dfrac{p-1}{2}$ si ha che il resto di x^2 è uguale al resto di $(p-x)^2$, il numero dei resti possibili non supera $\dfrac{p-1}{2} + 1$, un numero che è minore o uguale a $p - 1$ per $p \geq 3$.

6. Per ogni intero $n \geq 2$, determinare:

(a) il più grande numero reale c_n tale che

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n} \geq c_n$$

per ogni scelta dei numeri reali positivi a_1, a_2, …, a_n tali che $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$;

(b) il più grande numero reale d_n tale che

$$\frac{1}{1+2a_1} + \frac{1}{1+2a_2} + \ldots + \frac{1}{1+2a_n} \geq d_n$$

per ogni scelta dei numeri reali positivi a_1, a_2, …, a_n tali che $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$.

SOLUZIONE: (a) $c_n = 1$ per ogni $n \geq 2$.

Dimostriamo innanzitutto che per ogni $n \geq 2$ si ha

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n} \geq 1.$$

Per $n = 2$, ponendo $a_1 = a$ si ha $a_2 = \dfrac{1}{a}$ e l'espressione a sinistra della disuguaglianza si riduce a

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+\frac{1}{a}} = \frac{1}{1+a} + \frac{a}{1+a} = 1.$$

Supponiamo ora $n > 2$. Il prodotto dei due numeri più piccoli fra $a_1, \ldots, a_n$ è sicuramente minore o uguale di 1, altrimenti almeno uno di essi sarebbe maggiore di 1 e quindi il prodotto $a_1 a_2 \cdots a_n$ sarebbe maggiore di 1. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che $a_1 a_2 \leq 1$. Sia $x = \sqrt{\dfrac{1}{a_1 a_2}}$. Allora $x \geq 1$ e si ha $(a_1 x)(a_2 x) = 1$. Abbiamo

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n} > \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} \geq \frac{1}{1+a_1 x} + \frac{1}{1+a_2 x} = 1.$$

Dimostriamo ora che 1 è il più grande numero reale che possa essere messo a destra della disuguaglianza, ovverosia che se $c > 1$ la disuguaglianza non è vera per qualche scelta di $a_1, \ldots, a_n$. Poniamo $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = y$, dove y è un qualsiasi numero reale positivo tale $y + 1 > \dfrac{n-1}{c-1}$, e $a_n = y^{-(n-1)}$. Abbiamo, per $i = 1, \ldots, n-1$,

$$\frac{1}{1+a_i} = \frac{1}{1+y} < \frac{c-1}{n-1}$$

e quindi

$$\left(\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_{n-1}}\right) + \frac{1}{1+a_n} < (n-1)\frac{c-1}{n-1} + 1 = c.$$

(b) Si ha $d_2 = \dfrac{2}{3}$ e $d_n = 1$ per ogni $n \geq 3$.

Cominciamo con il caso $n = 2$. Ponendo $s = a_1 + a_2$ e tenendo conto che $a_1 a_2 = 1$ il termine a sinistra della disuguaglianza diventa

$$\frac{2+2s}{5+2s} = 1 - \frac{3}{5+2s}.$$

Questo termine assume il valore minimo quando s è minimo. Poiché $a_2 = \dfrac{1}{a_1}$, si ha $s = a_1 + \dfrac{1}{a_1}$ è maggiore o uguale a 2, e che è uguale a 2 se e solo se $a_1 = 1$. Quindi la migliore disuguaglianza possibile si ottiene per $s = 2$, ottenenendo il valore $d_2 = \dfrac{2}{3}$.

Il resto della dimostrazione è analogo al caso precedente. Dimostriamo dapprima che $d_n \geq 1$ per ogni $n \geq 3$. Per $n = 3$, la disuguaglianza

$$\frac{1}{1+2a_1} + \frac{1}{1+2a_2} + \frac{1}{1+2a_3} \geq 1$$

è equivalente a

$$3 + 4(a_1 + a_2 + a_3) + 4(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1) \geq 1 + 2(a_1 + a_2 + a_3) + 4(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1) + 8 a_1 a_2 a_3,$$

ossia

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq \frac{8-2}{2} = 3,$$

che è verificata per la nota disuguaglianza fra media aritmetica e media geometrica.

Supponiamo ora $n > 3$. Come precedentemente, possiamo supporre che $a_1 a_2 a_3 \leq 1$ e definiamo $x = \sqrt{\dfrac{1}{a_1 a_2 a_3}}$. Abbiamo $(a_1 x)(a_2 x)(a_3 x) = 1$ e dunque

$$\frac{1}{1+2a_1} + \frac{1}{1+2a_2} + \frac{1}{1+2a_3} + \ldots + \frac{1}{1+2a_n} > \frac{1}{1+2a_1} + \frac{1}{1+2a_2} + \frac{1}{1+2a_3}$$
$$\geq \frac{1}{1+2a_1 x} + \frac{1}{1+2a_2 x} + \frac{1}{1+2a_3 x} \geq 1.$$

Infine, se d è un qualsiasi numero maggiore di 1, poniamo $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = z$ dove z è un qualsiasi numero reale positivo tale che $2z + 1 > \dfrac{d-1}{n-1}$, e $a_n = z^{-(n-1)}$. Abbiamo

$$\left(\frac{1}{1+2a_1} + \frac{1}{1+2a_2} + \ldots + \frac{1}{1+2a_{n-1}}\right) + \frac{1}{1+2a_n} < (n-1)\frac{d-1}{n-1} + 1 = d.$$