XXV OLIMPIADE ITALIANA DI MATEMATICA

Cesenatico, 8 maggio 2009

SOLUZIONI

1. Siano $a < b < c < d < e$ numeri reali. Si calcolano tutte le possibili somme a due a due di questi 5 numeri. Di queste 10 somme, le tre più piccole sono $32, 36, 37$, mentre le due più grandi sono 48 e 51. Si determinino tutti i possibili valori che può assumere e.

Soluzione: È innanzitutto evidente che le due somme più piccole, 32 e 36, sono rispettivamente $a+b$ e $a+c$. Allo stesso modo, le due somme più grandi, 48 e 51, sono rispettivamente $c+e$ e $d+e$. Dunque $a+b=32$, $a+c=36$; sottraendo la prima equazione dalla seconda si ricava

$$c - b = 4. \tag{1}$$

Allo stesso modo, da $d+e=51$, $c+e=48$ si ottiene

$$d - c = 3 \tag{2}$$

e infine, sottraendo la (1) dalla (2), si ottiene

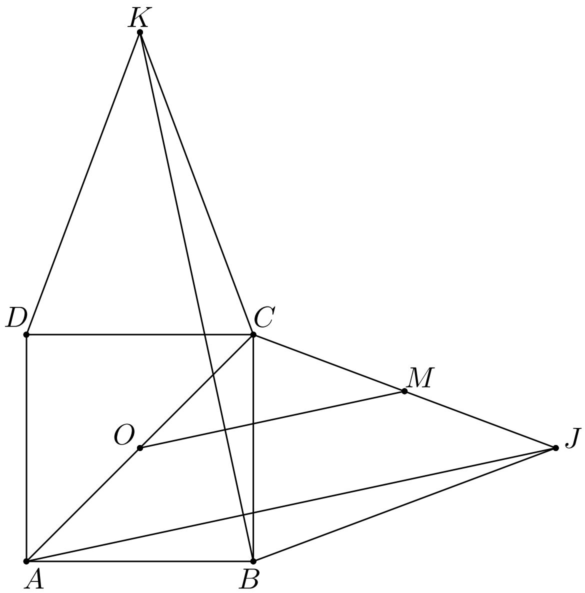
$$d - b = 7. \tag{3}$$

Resta ancora da capire a che somma corrisponda il valore 37. A priori, si possono presentare due possibilità: $37 = a+d$ oppure $37 = b+c$. Se fosse $37 = a+d$, allora per la (3) si avrebbe $37 = a+d = (a+b)+(d-b) = 32+7 = 39$, il che è assurdo. Quindi rimane solo la possibilità $37 = b+c$. A questo punto è facile calcolare i valori di a, b e c. Infatti $2a = (a+b)+(a+c)-(b+c) = 32+36-37 = 31$, da cui $a = 15.5$, $b = 32-a = 16.5$ e $c = 37-b = 20.5$. Noto il valore di c, possiamo calcolare anche $e = 48-c = 27.5$, da cui $d = 23.5$. Con questi valori di a, b, c, d, e risulta in effetti che le tre somme più piccole sono $32, 36$ e 37 e le due somme più grandi sono 48 e 51, per cui l'unico valore possibile per e è 27.5.

2. Sia $ABCD$ un quadrato di centro O. Si costruiscano due triangoli isosceli BCJ e CDK, esterni al quadrato, di base BC e CD rispettivamente e congruenti fra loro. Sia poi M il punto medio di CJ. Si provi che le rette OM e BK sono perpendicolari.

Soluzione:

Poiché O è punto medio di AC e M è punto medio di CJ, una dilatazione di centro C e fattore 2 manda il triangolo COM nel triangolo CAJ: è dunque sufficiente provare che $BK \perp AJ$.
Osserviamo ora che una rotazione antioraria di 90° di centro O manda il segmento AB nel segmento BC e il punto J nel punto K, in quanto $BJ = CK$ e $\widehat{ABJ} = \widehat{BCK}$: ciò comporta che il segmento BK sia immagine del segmento AJ secondo una rotazione di 90°, da cui la tesi.



3. Un numero naturale n è detto *gradevole* se gode delle seguenti proprietà:

- la sua espressione decimale è costituita da 4 cifre;
- la prima e la terza cifra di n sono uguali;
- la seconda e la quarta cifra di n sono uguali;
- il prodotto delle cifre di n divide n^2.

Si determinino tutti i numeri gradevoli.

Soluzione: Ogni numero *gradevole* può essere espresso come

$$n = 101 \cdot (10a + b)$$

dove a e b sono interi con $1 \leq a, b \leq 9$ (si esclude la cifra zero perché altrimenti il prodotto delle cifre sarebbe zero, che non divide nessun numero positivo). La condizione

$$(ab)^2 | n^2$$

implica $ab|n$, dunque sia a che b dividono n. Osserviamo però che 101 è un numero primo, quindi $\mathrm{MCD}(a, 101) = \mathrm{MCD}(b, 101) = 1$. Ne segue che e $a|10a + b$ e $b|10a + b$. Poichè ovviamente $a|10a$ si ha $a|b$, e dunque:

$$a|b|10a.$$

Giunti a questo punto, vi sono tre possibilità:

- $b = a$;
- $b = 2a$;
- $b = 5a$.

La prima comporta $a^2|11a$, ossia $a|11$ e dunque $a = b = 1$. La seconda comporta $2a^2|12a$, ossia $a|6$, con le tre soluzioni $(a, b) \in \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$. La terza comporta $5a^2|15a$, ossia $a|3$, con l'unica soluzione $(a, b) = (1, 5)$.

Si noti infine che tutte le soluzioni trovate soddisfano le condizioni del problema, quindi i numeri cercati sono: 1111, 1212, 2424, 3636, 1515.

4. Inizialmente una pulce si trova nel punto $(0, 0)$ del piano cartesiano. Successivamente compie n salti. Ogni salto viene effettuato in una a scelta delle quattro direzioni cardinali. Il primo salto è di lunghezza 1, il secondo di lunghezza 2, il terzo di lunghezza 4, e così via, fino all'n-salto, che è di lunghezza 2^{n-1}. Dimostrare che, se si conosce la posizione finale della pulce, allora è possibile determinare univocamente la sua posizione dopo ciascuno degli n salti.

Soluzione: Supponiamo che la posizione della pulce dopo k passi sia (x_k, y_k). Per le condizioni del problema si ha $|x_k| + |y_k| \leq 1 + 2 + ... + 2^{k-1} = 2^k - 1$, quindi la pulce deve trovarsi all'interno un quadrato Q_k di centro $(0, 0)$ e con vertici $(0, 2^k), (0, -2^k), (2^k, 0), (-2^k, 0)$.

Se ora denotiamo con $Q_k + (a, b)$ il quadrato Q_k traslato del vettore (a, b), otteniamo che (x_{k+1}, y_{k+1}) è contenuto all'interno di uno dei quadrati $Q_k + (2^k, 0)$, $Q_k + (0, 2^k)$, $Q_k + (-2^k, 0)$, $Q_k + (0, -2^k)$, secondo che il salto della pulce sia stato effettuato in direzione nord, est, sud e ovest rispettivamente. Ma le regioni interne a questi quadrati sono a due a due disgiunte, quindi (x_{k+1}, y_{k+1}) è contenuto in una sola di esse; ne segue che la posizione (x_{k+1}, y_{k+1}) della pulce dopo $k+1$ salti determina univocamente la posizione della pulce dopo k salti per ogni $k = 0, 1 \ldots, n - 1$.

Seconda soluzione: Coloriamo i punti a coordinate intere in bianco e nero, in modo che il punto (x, y) sia bianco se $x + y$ è pari e sia nero altrimenti. All'inizio la pulce è su un punto bianco, ma dal primo salto in poi sarà sempre su un punto nero. Date le coordinate (x_n, y_n) della pulce alla n-esima mossa, una soltanto sarà dispari, determinando di fatto se il primo spostamento sia stato compiuto in orizzontale o in verticale. Supponiamo, convenzionalmente, che ad essere dispari sia x_n, ossia che il primo spostamento sia stato effettuato in orizzontale. Allora

$$\left(\frac{x_n \pm 1}{2}, \frac{y_n}{2}\right)$$

sono le coordinate di una seconda pulce che parte da (x_1, y_1) e mima le mosse della prima a velocità dimezzata. Ragionando come in precedenza, uno ed un solo intero tra

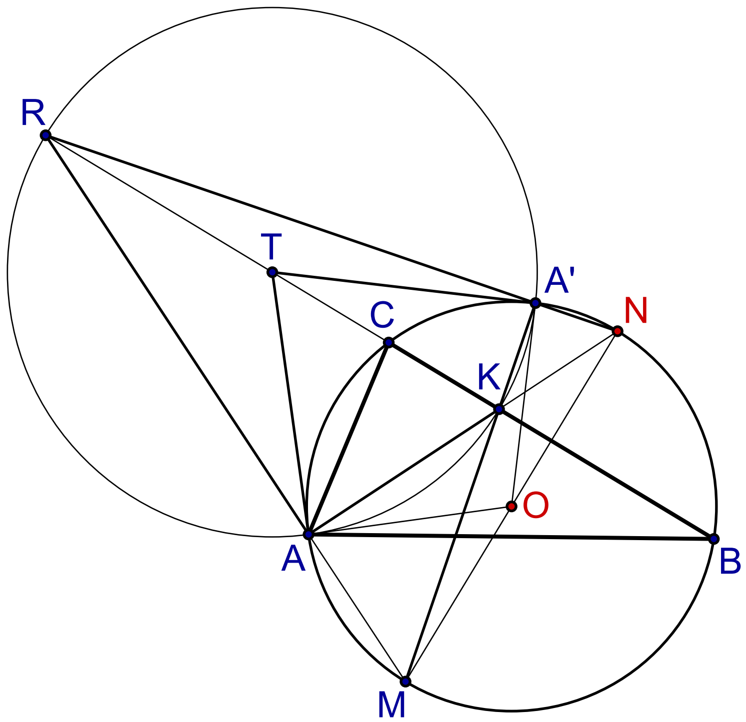
$$\frac{x_n \pm 1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{y_n}{2}$$

è dispari. Questo determina sia se lo spostamento della pulce è in orizzontale o in verticale al secondo salto, sia la direzione del primo salto (verso est o verso ovest).

Ragionando induttivamente, si determinano nell'ordine gli spostamenti della pulce al primo, secondo, terzo, ... , $(n - 1)$-esimo salto, e se l'n-esimo salto sia stato effettuato in orizzontale o verticale. Per determinare la direzione di quest'ultimo salto, basta controllare un segno: se il salto è stato effettuato in orizzontale, allora è stato effettuato verso est se $x_n > 0$ e verso ovest se $x_n < 0$ (e analogamente nel caso in cui il salto sia stato effettuato in direzione verticale; si veda anche la prima soluzione per le disuguaglianze necessarie).

5. Sia ABC un triangolo acutangolo, Γ la sua circonferenza circoscritta, K il piede della bisettrice relativa al vertice A. Sia M il punto medio dell'arco BC che contiene A. Detta A' la seconda intersezione di MK con Γ, si chiamino t, t' rispettivamente le tangenti a Γ in A e in A', r (risp. r') la perpendicolare ad AK (risp. $A'K$) passante per A (risp A'). Siano ora $T = t \cap t'$ e $R = r \cap r'$. Si provi che T, R e K sono allineati.

SOLUZIONE:



Denotiamo con O il centro di Γ e con N il punto medio dell'arco minore BC. Proviamo preliminarmente che la retta RA passa per M e che la retta RA' passa per N: il primo punto è equivalente a

$$\widehat{BAK} + \widehat{MAB} = \frac{\pi}{2};$$

ma per il teorema dell'angolo alla circonferenza $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$, e inoltre, per ipotesi, M è punto medio dell'arco maggiore BC e K piede della bisettrice uscente da A, dunque:

$$2(\widehat{BAK} + \widehat{MAB}) = \widehat{BAC} + \pi - \widehat{BMC} = \pi.$$

Per il teorema dell'angolo al centro/angolo alla circonferenza si ha:

$$\widehat{CON} = \widehat{NOB} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{CAN} = \widehat{NAB},$$

dunque AK passa per N e quest'ultimo, essendo antipodale ad M in Γ, realizza $\widehat{MA'N} = \frac{\pi}{2}$ e giace su RA'. A questo punto K risulta ortocentro del triangolo MRN, ragion per cui i punti A, A', R, K appartengono ad una stessa circonferenza di diametro RK. Il centro di tale circonferenza è il punto T, in quanto AT risulta congruente ad $A'T$ per il teorema delle tangenti e il triangolo ATK risulta isoscele (su base AK) poiché:

$$\widehat{KAT} = \frac{\pi}{2} - \widehat{OAK} = \widehat{NMA} = \widehat{NBA} = \widehat{CBA} + \widehat{NBC} = \widehat{CBA} + \widehat{NAC}$$

$$\widehat{TKA} = \pi - \widehat{ACB} - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{CBA} + \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{CBA} + \widehat{NAC}$$

Segue che T è punto medio di RK, da cui la tesi. [1]

[1] T può essere descritto come il simmetrico di O, punto medio di MN, rispetto al circocentro del triangolo AOA'. La circonferenza circoscritta al triangolo AOA' è la circonferenza di Feuerbach (o 'dei nove punti') relativa al triangolo MRN, il suo centro è dunque punto medio del segmento avente per estremi K e il circocentro di MRN: da ciò segue che la proiezione di T su MN coincide con la proiezione di K su MN, ossia

$$TK \perp MN.$$

Abbiamo però già provato che K è ortocentro di MRN, la perpendicolare ad MN per K è dunque l'altezza uscente dal vertice R. Considerato che $K \in BC$ e $BC \perp MN$, i punti

$$B, C, K, T, R$$

appartengono tutti ad una stessa retta.

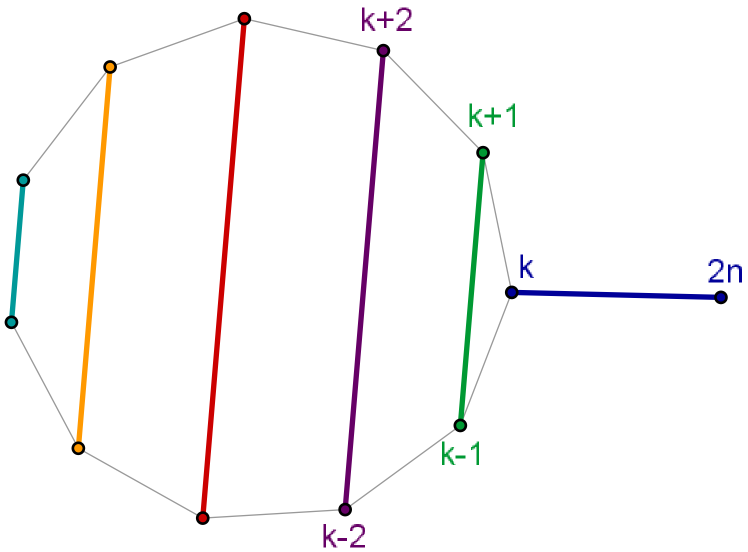
6. Un numero naturale k si dice n-squadrato se, colorando comunque con n colori diversi le caselle di una scacchiera $2n \times k$, esistono 4 caselle distinte dello stesso colore i cui centri sono vertici di un rettangolo avente i lati paralleli ai lati della scacchiera.
Determinare, in funzione di n, il più piccolo naturale k che sia n-squadrato.

Soluzione: Vogliaamo dimostrare che $2n^2 - n + 1$ è il più piccolo numero naturale che sia n-squadrato. Suddividiamo la dimostrazione in 2 passi:

- $k \geq 2n^2 - n + 1$ **è** n**-squadrato.** Per fissare le idee diciamo che la scacchiera ha $2n$ righe e k colonne. Chiamiamo *coppia verticale* una coppia di caselle dello stesso colore che si trovano su una stessa colonna. In ogni colonna ci sono almeno n *coppie verticali*: avendo a dispozione n colori ho al più n caselle colorate con colori distinti e poi ognuna delle restanti (che sono almeno n) formerà una *coppia verticale* con una delle caselle precedentemente considerate. Quindi nella scacchiera ci sono almeno $n \cdot k$ *coppie verticali.*

  Chiamando C il numero di *coppie verticali* nella scacchiera e c_i il numero di *coppie verticali* del colore i-esimo si ha che $C = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$. Poiché $C \geq n \cdot k$ si deduce che esiste un colore i_0 tale che $c_{i_0} \geq k$. Ci sono $\binom{2n}{2} = n(2n-1)$ possibili configurazioni per una *coppia verticale* all'interno di una colonna. Quindi preso $k \geq 2n^2 - n + 1$ ci sono sicuramente due *coppie verticali* del colore i_0 nella stessa configurazione, che insieme formano un rettangolo che soddisfa le richieste del problema.
  Quindi ogni $k \geq 2n^2 - n + 1$ è n-squadrato.

- $k \leq 2n^2 - n$ **non è** n**-squadrato.** Ci basta dimostrare che $2n^2 - n$ non è n-squadrato. Per farlo mostriamo che si può colorare una scacchiera $2n \times (2n^2 - n)$ con n colori in modo che non ci siano rettangoli che soddisfino le richieste del problema, cioè che non esistano due *coppie verticali* dello stesso colore nella stessa configurazione. Ci basta in realtà colorare una scacchiera "piccola" $2n \times (2n - 1)$ in modo che ci sia una ed una sola *coppia verticale* per ciascuna configurazione; ciclando poi i colori otteniamo altre $n - 1$ scacchiere da affiancare a questa che formeranno quella $2n \times (2n^2 - n)$ richiesta.
  Per fare la scacchiera "piccola" ci conviene guardarla così: le righe rappresentano delle squadre, le colonne rappresentano le giornate e le *coppie verticali* sono le partite. Le condizioni imposte sulle *coppie verticali* si traducono nella richiesta di realizzare un torneo per $2n$ squadre, con $2n - 1$ giornate, dove ogni squadra incontra ogni altra squadra una ed una sola volta e in ogni giornata ogni squadra disputa un solo incontro. Per realizzare il torneo possiamo procedere così: consideriamo un $(2n - 1)$-agono regolare e un punto esterno dove i vertici del poligono sono le squadre $1, \ldots, 2n - 1$ e il punto esterno è la squadra $2n$; gli incontri della giornata k sono tutte le diagonali parallele che alla fine lasciano fuori il vertice k, che gareggierà con $2n$.[2]
  Ora basta assegnare n colori diversi alle n partite di una stessa giornata e il colore della partita alle due squadre che la giocano.



[2]Prendendo la squadra $2n$-esima a parte, alla k-esima giornata la squadra k gareggia con la squadra $2n$ mentre la squadra i-esima gareggia con la j-esima dove $i + j - 2 \cdot k$ è multiplo di $2n - 1$.