

XXV OLIMPIADE ITALIANA DI MATEMATICA

Cesenatico, 9 maggio 2008

1. Siano $a < b < c < d < e$ numeri reali. Si calcolano tutte le possibili somme a due a due di questi 5 numeri. Di queste 10 somme, le tre più piccole sono 32, 36, 37, mentre le due più grandi sono 48 e 51. Si determinino tutti i possibili valori che può assumere e .
2. Sia $ABCD$ un quadrato di centro O . Si costruiscano due triangoli isosceli BCJ e CDK , esterni al quadrato, di base BC e CD rispettivamente e congruenti fra loro. Sia poi M il punto medio di CJ . Si provi che le rette OM e BK sono perpendicolari.
3. Un numero naturale n è detto *gradevole* se gode delle seguenti proprietà:
 - la sua espressione decimale è costituita da 4 cifre;
 - la prima e la terza cifra di n sono uguali;
 - la seconda e la quarta cifra di n sono uguali;
 - il prodotto delle cifre di n divide n^2 .

Si determinino tutti i numeri gradevoli.

4. Una pulce si trova inizialmente nel punto $(0,0)$ del piano cartesiano. Successivamente compie n salti. Ogni salto viene effettuato in una a scelta delle quattro direzioni cardinali. Il primo salto è di lunghezza 1, il secondo di lunghezza 2, il terzo di lunghezza 4, e così via, fino all' n -salto, che è di lunghezza 2^{n-1} . Dimostrare che, se si conosce la posizione finale della pulce, allora è possibile determinare univocamente la sua posizione dopo ciascuno degli n salti.
5. Sia ABC un triangolo scaleno e acutangolo, Γ la sua circonferenza circoscritta, K il piede della bisettrice relativa al vertice A . Sia M il punto medio dell'arco BC che contiene A . Detta A' la seconda intersezione di MK con Γ , sia T l'intersezione delle tangenti a Γ in A e in A' . Sia inoltre R l'intersezione della perpendicolare ad AK per A e della perpendicolare ad $A'K$ per A' . Si provi che T, R e K sono allineati.
6. Un numero naturale k si dice n -squadrato se, colorando comunque con n colori diversi le caselle di una scacchiera $2n \times k$, esistono 4 caselle distinte dello stesso colore i cui centri sono vertici di un rettangolo avente i lati paralleli ai lati della scacchiera. Determinare, in funzione di n , il più piccolo naturale k che sia n -squadrato.