XXVI OLIMPIADE ITALIANA DI MATEMATICA

Cesenatico, 7 maggio 2010

SOLUZIONI

1. Ad un test di matematica partecipano $N < 40$ persone. La sufficienza è fissata a 65. I risultati del test sono i seguenti: la media di tutti i partecipanti è 66, quella dei promossi 71 e quella dei bocciati 56. Tuttavia, a causa di un errore nella formulazione di un quesito, tutti i punteggi vengono aumentati di 5. A questo punto la media dei promossi diviene 75 e quella dei non promossi 59.

(a) Trovare tutti i possibili valori di N.

(b) Trovare tutti i possibili valori di N nel caso in cui, dopo l'aumento, la media dei promossi fosse diventata 79 e quella dei non promossi 47.

Soluzione: (a) Sia P_1 il numero dei promossi prima dell'incremento e P_2 il numero di promossi dopo l'incremento di punteggio. Dalle informazioni che abbiamo possiamo scrivere:

$$66N = 71P_1 + 56(N - P_1), \qquad 71N = 75P_2 + 59(N - P_2).$$

Dalla prima relazione, svolgendo i conti, otteniamo $10N = 15P_1$ o $2N = 3P_1$, da cui, essendo N e P_1 interi, possiamo concludere che N è multiplo di 3. Similmente, dalla seconda relazione abbiamo $12N = 16P_2$ o $3N = 4P_2$, e dunque N è multiplo di 4. In conclusione, N dev'essere multiplo di 3 e di 4, ovvero di 12, e può dunque valere 12, 24 o 36. Questi tre casi sono in effetti possibili. Cerchiamo infatti un esempio per $N = 12$, tentando di avere voti il più possibile uguali. Se 8 persone, ovvero i promossi immediatamente, hanno un voto prima dell'incremento di 71, una ha preso 62 e i rimanenti tre 54 abbiamo verificate tutte le ipotesi del problema. I casi $N = 24$ e $N = 36$ sono analoghi, rispettivamente raddoppiando e triplicando le persone in ciascuna fascia di punteggio.

(b) Nessun N può verificare le ipotesi di questo punto. Sia infatti M_p la media - prima dell'incremento - di coloro che NON erano promossi prima dell'incremento ma che lo diverrebbero dopo. Allora si avrebbe:

$$76P_1 + (M_p + 5)(P_2 - P_1) = 79P_2$$

Ma $M_p < 65$, dunque $M_p + 5 < 70 < 76$, da cui

$$79P_2 = 76P_1 + (M_p + 5)(P_2 - P_1) < 76P_1 + 76(P_2 - P_1) = 76P_2 < 79P_2$$

assurdo.

2. Ogni numero naturale, zero incluso, è colorato di bianco o di rosso, in modo che:

- vi siano almeno un numero bianco ed almeno un numero rosso;
- la somma tra un numero bianco ed un numero rosso sia bianca;
- il prodotto tra un numero bianco ed un numero rosso sia rosso.

Dimostrare che il prodotto di due numeri rossi è sempre un numero rosso e che la somma di due numeri rossi è sempre un numero rosso.

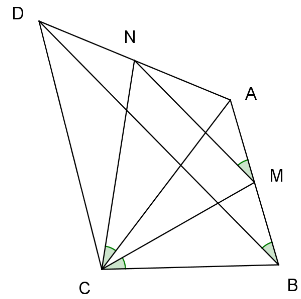
Soluzione: Lo zero è un numero rosso: infatti, se 0 fosse bianco, dato che esiste un numero rosso x, avremmo che $0 + x = x$ è bianco per la seconda proprietà, contraddizione.

Uno è un numero bianco: infatti, se uno fosse rosso, dato che esiste un numero bianco y, avremmo che $y \cdots 1 = y$ è rosso per la terza proprietà, contraddizione.

Se non ci sono numeri rossi diversi da zero, la tesi è banale. Altrimenti, sia k il più piccolo numero rosso maggiore di zero. Allora ogni numero non multiplo di k è bianco: infatti, se n non è multiplo di k, n si può scrivere nella forma $n = qk + r$ con $0 < r < k$. Usiamo l'induzione su q. Se $q = 0$, n è bianco per ipotesi. Supponendo vera l'ipotesi per $q - 1$, abbiamo $n = [(q - 1)k + r] + k$, che è bianco per la seconda proprietà.

Per la terza proprietà, ogni multiplo di k della forma $j \cdot k$, con j non divisibile per k, è rosso. Supponiamo ora che n sia un multiplo di k della forma $j \cdot k$ con $j = lk$ *divisibile per* k, ossia che n sia della forma $l \cdot k^2$. Dall'uguaglianza $k + l \cdot k^2 = (1 + lk) \cdot k$ abbiamo, per la seconda proprietà, che anche in questo caso n deve essere rosso. Quindi i numeri rossi sono *tutti e soli i multipli di* k. In questo caso sia le ipotesi del problema sia la tesi sono banalmente verificate.

3. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso tale che $\widehat{CAB} = \widehat{CDA}$ e $\widehat{BCA} = \widehat{ACD}$. Detto M il punto medio di AB si dimostri che $\widehat{BCM} = \widehat{DBA}$.



Soluzione: Chiamiamo per comodità $\widehat{BCM} = \alpha$. Consideriamo i triangoli $\triangle ADC$ e $\triangle BAC$: essi hanno due angoli congruenti, e quindi anche il terzo è congruente per differenza ($\widehat{CAD} = \widehat{CBA}$). Per il primo criterio di similitudine sono dunque simili; in particolare si ha $AD : BA = CA : CB$. Detto N il punto medio di AD, consideriamo i triangoli $\triangle CAN$ e $\triangle CBM$, che sono simili poiché hanno $AN : BM = 2AN : 2BM = AD : BA = CA : CB$ e $\widehat{CAN} = \widehat{CBM}$ per quanto dimostrato prima. Si ha in particolare che $\widehat{ACN} = \widehat{BCM} = \alpha$ in quanto angoli corrispondenti di triangoli simili, da cui

$$\widehat{NCM} = \widehat{ACN} + \widehat{ACM} = \widehat{BCM} + \widehat{ACM} = \widehat{ACB}.$$

Consideriamo il quadrilatero $ANCM$ e dimostriamo che è ciclico (inscrittibile in una circonferenza): effettuando la somma degli angoli opposti in A e C si otteniene

$$\widehat{NAM} + \widehat{NCM} = (\widehat{DAC} + \widehat{CAB}) + \widehat{ACB} = \widehat{CBA} + \widehat{CAB} + \widehat{ACB} = 180^o$$

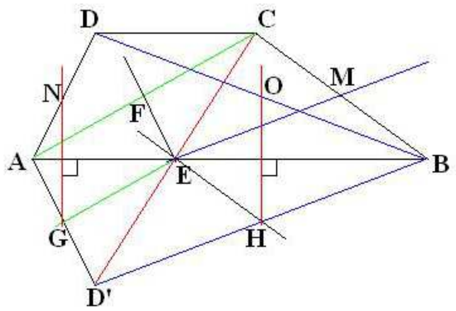
dove l'ultima uguaglianza è data dal fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto. Dalla ciclicità di $ANCM$ si deduce $\widehat{NMA} = \widehat{NCA} = \alpha$ (angoli che insistono sullo stesso arco). Ma ora, essendo N e M punti medi di AD e AB, per Talete avremo che $NM \parallel BD$; in conclusione $\widehat{DBA} = \widehat{NMA} = \alpha$, poiché angoli corrispondenti di due parallele tagliate da una retta.

Seconda soluzione: Consideriamo E in modo che $EACD$ sia un parallelogramma e dimostriamo che i triangoli EAC e DAB sono simili (usando i risultati della prima parte della soluzione mostrara sopra).

Terza soluzione: Consideriamo il piano di Gauss dove $c = 0$ è l'origine e $b = 1$. $\triangle ADC \sim \triangle BAC$ algebricamente si traduce in $d = a^2$.
Esprimendo la tesi in termini di numeri complessi bisogna dimostrare che $\arg \frac{(a+b)/2-c}{b-c} = \arg \frac{b-d}{b-a}$; svolgendo i conti otteniamo:

$$\arg \frac{(a+b)/2 - c}{b-c} = \arg \frac{z+1}{2} = \arg (z+1) = \arg \frac{1-z^2}{1-z} = \arg \frac{b-d}{b-a}$$

4. Nel trapezio $ABCD$ i lati AB e CD sono paralleli, gli angoli $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BAD}$ sono acuti. Dimostrare che è possibile dividere il triangolo ABC in 4 triangoli disgiunti $X_1, \dots, X_4$ e il triangolo ABD in 4 triangoli disgiunti $Y_1, \dots, Y_4$ tali che i triangoli X_i e Y_i siano congruenti per ogni i.



Soluzione: Sia D' il simmetrico di D rispetto ad AB, e sia E intersezione fra la retta CD' e la retta AB. Dato che gli angoli $\widehat{BAD}, \widehat{CBA}$ sono acuti, E giace all'interno del segmento AB. Inoltre dato che C e D' sono equidistanti da AB, si ha $CE = ED'$.
Si traccino per E le rette $r_1 // AC$ e $r_2 // AD'$, e denotati con G l'intersezione fra r_1 e AD', F l'intersezione fra r_2 e AC, per costruzione risulta

$$AEF = EAG, \qquad CEF = ED'G.$$

Analogamente si traccino per E le rette $r_3 // BD'$ e $r_4 // BC$, e denotati con M l'intersezione fra r_3 e BC, H l'intersezione fra r_4 e BD', risulta

$$CEM = ED'H, \qquad BEM = EBH.$$

Siano infine O, N i simmetrici di H, G rispetto ad AB e la scelta

$$X_1 = AEF,\ X_2 = CEF,\ X_3 = CEM,\ X_4 = BEM$$

$$Y_1 = EAN,\ Y_2 = EDN,\ Y_3 = EDO,\ Y_4 = EBO$$

verifica la tesi.

5. Nel paese di Cuccagna si gioca al seguente solitario. Si parte da una stringa finita di zeri e uni, e sono concesse le mosse seguenti:

(i) cancellare due uni consecutivi;

(ii) cancellare tre zeri consecutivi;

(iii) se all'interno della stringa c'è la sottostringa 01, si può sostituire questa sottostringa con 100.

Le mosse (i), (ii) e (iii) devono essere fatte una alla volta e in successione. Si vince se si riesce a ridurre la stringa ad una formata da due cifre o meno.

(Per esempio, partendo da 0101 si può vincere usando innanzitutto la mossa (iii) sulle due cifre finali, ottenendo 01100, poi giocando la mossa (i) sui due uni di questa, ed infine la mossa (ii) sui tre zeri rimasti: così si ottiene la stringa vuota.)

Quante sono fra tutte le 1024 stringhe possibili di dieci cifre quelle a partire dalle quali non è possibile vincere il solitario?

Soluzione: Dimostro che l'unica stringa di dieci cifre partendo dalla quale non è possibile vincere il solitario è 1111100000 (cinque uni seguiti da cinque zeri).
Data una stringa considero queste due quantità:
– il numero degli uni,
– il *peso* totale degli zeri, dove uno zero alla cui destra compaiano i uni pesa 2^i. (Per esempio ciascuno degli zeri della stringa 001 pesa 2.)
La mossa (iii) lascia inalterate entrambe le quantità, perché non cambia il numero degli uni e sostituisce uno zero con due che pesano, ciascuno, la metà. Ad ogni stringa assegno, quindi, un *tipo* rappresentato da una coppia di numeri: il primo è il resto della divisione per 2 del numero degli uni, il secondo è il resto della divisione per 3 del peso degli zeri. Nessuna delle mosse, come abbiamo già visto per la mossa (iii), altera il tipo della stringa. La mossa (ii), infatti, rimuove tre zeri dello stesso peso, quindi diminuisce il peso di un multiplo di 3, e non tocca gli uni. La mossa (i) rimuove un multiplo di 2 di uni, però altera il peso degli zeri alla loro sinistra. Tuttavia, detto p il peso di questi zeri *dopo* la mossa, il peso *prima* era $4p$, ossia è diminuito di $3p$, un multiplo di 3.

Dimostro ora che partendo da una stringa di tipo (a, b) diverso da $(1, 2)$ è possibile vincere. Inizio giocando la mossa (iii) finché posso. Questo passo deve avere termine perché ad ogni applicazione della mossa (iii) si aggiunge uno zero, tuttavia il numero degli zeri non può superare il loro peso totale, che rimane costante. Quando non posso più giocare la mossa (iii), la stringa deve essere costituita da $2n + a$ uni seguiti da $3m + b$ zeri. A questo punto gioco n volte la mossa (i) sugli uni e m volte la mossa (ii) sugli zeri, ottenendo una stringa di a uni seguiti da b zeri. Siccome il tipo (a, b) è diverso da $(1, 2)$ la somma $a + b$ deve essere minore di tre, quindi ho vinto.

Chiamo *brutte* le stringhe costituite da $2n + 1$ uni consecutivi seguiti da $3m + 2$ zeri consecutivi: è chiaro che una stringa brutta non può essere ridotta che a una stringa brutta, e 100 è la più corta stringa brutta possibile. Quindi partendo da una stringa brutta non si può vincere. Mostrerò nel seguito una strategia per vincere partendo da stringhe di tipo $(1, 2)$ che non siano brutte. Ne segue che le uniche stringhe partendo dalle quali non è possibile vincere sono quelle brutte.

Innanzitutto, se la stringa – che da ora supponiamo di tipo $(1, 2)$, ma non brutta – termina con tre o più zeri, applico a questi la mossa (ii) fino a ridurli a meno di tre. La stringa così ottenuta ricadrà in una di queste forme:
A – $X1$ con X di tipo $(0, 1)$
B – $X10$ con X di tipo $(0, 2)$
C – $X100$ con X di tipo $(0, 0)$.
Le esamino separatamente.

Nel caso A, gioco il solitario su X (dove so come vincere). Riduco quindi X alla stringa 0. In questo modo ho ridotto la mia stringa iniziale a 01, e ho vinto.

Analogamente, nel caso B, riduco X a 00, ho quindi condotto la stringa a 0010. Ora vinco per mezzo delle mosse 0**01**0 → 01**000** → 01 (per chiarezza, scrivo in **grassetto** le cifre su cui gioco una mossa).

Il caso C è leggermente più complicato. Osservo che X non è composta da soli uni, perché altrimenti la stringa di partenza sarebbe stata brutta. Quindi in X ho almeno uno zero. O questo zero è l'ultima cifra di X, oppure, a furia di mosse (iii), posso modifocare X in modo da ottenere una stringa con uno zero al fondo. A questo punto ho ridotto $X100$ alla forma $Y0100$. Il tipo di Y deve essere $(0, 2)$. Come prima, gioco il solitario su Y riducendola a 00. Ho quindi ridotto la mia stringa iniziale a 000100. Ora vinco facendo 00**01**00 → 0**01**0000 → 01**000**000 → 01**000** → 01.

Osservando, ora, che 1111100000 è l'unica stringa brutta di dieci cifre ho l'asserto.

Seconda Soluzione: Sostengo che l'unica stringa di dieci cifre partendo dalla quale non è possibile vincere il solitario è 1111100000 (cinque uni seguiti da cinque zeri).

Passo 1 Intendo dimostrare che ogni stringa può essere ridotta ad una delle seguenti: $\perp$, 0, 1, 00, 10, 100 (indico con $\perp$ la stringa vuota).

Data una stringa s, considero la più breve stringa s' che possa essere ottenuta a partire da essa. Chiaramente s' non contiene coppie di uni adiacenti, quindi, se in essa compare un uno, questo si trova all'inizio, alla fine, o in una sottostringa 010. Il terzo caso, tuttavia, è assurdo, perché s' potrebbe essere accorciata mediante le mosse $\mathbf{01}0 \to 1\mathbf{000} \to 1$ (scrivo in **grassetto** le cifre su cui gioco una mossa). Quindi s' contiene al più due uni, e una sequenza ininterrotta di zeri. Questa, d'altro canto, non può contenere più di due zeri. Quindi la stringa s' è una delle stringhe indicate sopra, oppure:

$$\begin{aligned}
\mathbf{11} &\to \perp\\
1\mathbf{01} &\to \mathbf{11}00 \to 00\\
10\mathbf{01} &\to 1\mathbf{01}00 \to \mathbf{11}0000 \to \mathbf{000}0 \to 0\\
\mathbf{01} &\to 100\\
0\mathbf{01} &\to \mathbf{01}00 \to 10\mathbf{000} \to 10
\end{aligned}$$

Passo 2 Dimostro che partendo da una stringa s che inizia con uno zero è possibile vincere.

La stringa s è di tipo $0X$. Sfruttando il passo 1 riduco X a una delle stringhe elencate. A questo punto ho ottenuto una delle seguenti stringhe: 0, 00, 01, $\mathbf{000} \to \perp$, $010 \to 1$ (come sopra), $\mathbf{01}00 \to 10\mathbf{000} \to 10$.

Passo 3 Partendo da una stringa che iniza per 1 si può vincere a patto che questa non sia 1111100000.

Considero il caso in cui la stringa è costituita da $2n + a$ uni seguiti da $3m + b$ zeri, con $a = 0, 1$ e $b = 0, 1, 2$. Allora la mossa (iii) non può essere giocata, e le mosse (i) e (ii) hanno rispettivamente l'effetto di diminuire n ed m di uno. Ne deduco che la più breve stringa che possa essere ottenuta è costituita da a uni seguiti da b zeri. L'unico caso in cui questa non ha lunghezza maggiore di due è con $a = 1$ e $b = 2$, che, per stringhe di lunghezza 10 è possibile solo nel caso 1111100000.

Rimane il caso in cui la stringa inizia con n uni, seguiti da m zeri, seguiti a loro volta da un uno. Se n è pari, usando la mossa (i) mi riduco al caso del passo 2. Se, però, n è dispari, posso sfruttare la mossa (iii) per spostare l'uno a destra degli zeri verso sinistra, in modo da ricondurmi al caso in cui gli uni sono pari.

Faccio così: considero la sottostringa costituita da m zeri seguiti dall'uno. Applicando la mossa (iii) alla sottostringa 01 che si trova al fondo di questa ottengo una nuova stringa che inizia per $m - 1$ zeri seguiti da un uno (e poi due zeri). Ripetendo il procedimento altre $m - 1$ volte avrò una stringa che inizia per 10, che è ciò che mi serve.

6. Dimostrare che esistono infiniti numeri primi che dividono almeno un intero della forma $2^{n^3+1} - 3^{n^2+1} + 5^{n+1}$ con n intero positivo.

Soluzione: Supponiamo che l'insieme S dei primi che dividono gli interi della forma $a_n = 2^{n^3+1} - 3^{n^2+1} + 5^{n+1}$ sia finito. Troveremo una contraddizione esibendo un intero n tale che a_n possiede almeno un fattore primo che non appartiene ad S.

Sia n il prodotto di tutti i numeri $p - 1$ al variare di p in S (cioè n è la funzione di Eulero del prodotto dei primi in S). Poiché $a_1 = 2^2 - 3^2 + 5^2 = 20 = 2^2 \cdot 5$, allora $4 = 5 - 1$ divide n. Inoltre, per ogni $p \in S$, eccetto eventualmente i casi $p = 2, 3, 5$, si ha, per il piccolo teorema di Fermat, $2^n \equiv 3^n \equiv 5^n \equiv 1 \pmod p$, da cui

$$a_n = 2^{n^3+1} - 3^{n^2+1} + 5^{n+1} \equiv 2 - 3 + 5 \equiv 4 \pmod p \quad \forall p \in S,\ p \neq 2, 3, 5.$$

Nessuno dei primi di S può pertanto dividere a_n, eccetto eventualmente 2, 3 e 5. D'altra parte a_n non è divisibile per 3: infatti, poiché n è pari, si ha $a_n \equiv 2 - 0 + 2 \equiv 1 \pmod 3$. Inoltre a_n non è nemmeno divisibile per 5: infatti, poiché n è multiplo di 4, $a_n \equiv 2 - 3 + 0 \equiv -1 \pmod 5$. Se, per assurdo, a_n avesse solamente fattori primi appartenenti ad S, allora a_n dovrebbe essere necessariamente una potenza di 2. Dato che $n \geq 2$, si ha $0 < 3^{n^2+1} - 5^{n+1} < 2^{n^3}$, da cui

$$2^{n^3} = 2^{n^3+1} - 2^{n^3} < a_n < 2^{n^3+1}.$$

Ne segue che a_n è compreso fra due potenze di 2 consecutive, e quindi non può essere esso stesso una potenza di 2; questa contraddizione dà la tesi.