XI GARA NAZIONALE A SQUADRE

Finale Nazionale – 8 Maggio 2010

Cesenatico 2010

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

10 Pezzi facili

1. Il Bar Scumm™

All'alba dell'8 maggio 1726, Jack Disparrow, Bourbakossa e Elizabeth Somm siedono sbronzi al tavolo di un bar, quando si presenta un giovane dall'aria ingenua che dice di aver saputo che per diventare un π-rata deve rivolgersi in quel bar ai tre π-rati dall'aspetto importante. Tra il serio e il faceto, i tre amici gli sottopongono un quesito piratesco: "Quanti sono gli anni da adesso al 2010 che sono multipli della risposta a questa domanda?"

2. Lotta tra le flotte

Nell'epico scontro tra la flotta dei π-rati e quella della Compagnia delle Indie Orientali, come si racconterà per generazioni, le n navi guidate da Capitan Jack Disparrow sconfissero le m navi della flotta di Lord Bracket, dove n ed m sono le soluzioni dell'equazione $x^2 - 126x + 3293 = 0$. Sapendo che su ognuna delle n navi di Disparrow c'erano n π-rati e che su ogni nave della Compagnia c'erano m militari, quanti in tutto parteciparono allo scontro?

3. π-rata nobile e pure esteta

Il sanguinario Bourbakossa è sorprendentemente anche un fine esteta e vuole mettere ordine nella sua cantina, dopo il passaggio di Jack. Egli possiede 28 bottiglie identiche di rum, che vuole disporre sulle 7 mensole della sua cabina in modo che:

- ce ne sia un numero diverso per ogni mensola e
- per ogni $n = 1, 2, \ldots, 7$ il numero complessivo di bottiglie sulle prime n mensole *non* sia multiplo di 3.

In quanti modi diversi può riempire le mensole, in modo che nessuna di esse risulti vuota?

4. Il pendolo della salvezza

Alcuni π-rati sono stati imprigionati dai cannibali in una gabbia che penzola in mezzo ad un burrone e legata ad una lunga fune. Per fuggire devono far oscillare la fune fino ad arrivare alla parete del burrone. Elizabeth calcola che il numero di oscillazioni necessarie è la somma degli interi positivi che sono uguali al quadrato della somma delle proprie cifre. Quante oscillazioni dovranno fare, se i suoi calcoli sono giusti?

5. Pirateria musicale

Tutti i π-rati amano la musica, ma quelli veramente puristi non vogliono pagarla, e si limitano a "navigare" fino a che trovano l'occasione propizia per "scaricarla" illegalmente (dalle navi catturate! Che avevate capito!). Jack è sulle tracce di un carico di Menestrelli Pirateschi 3-mendi e per sapere dove intercettare la nave che li trasporta deve trovare tutti i numeri di 4 cifre tali che:

- la somma della prima e della terza cifra sia uguale alla somma della seconda e della quarta cifra e sia uguale a 9;
- non ci siano due cifre dispari vicine;
- la prima cifra (cioè quella delle migliaia) sia minore della seconda e della quarta.

La somma di tutti i numeri che soddisfano questi requisiti rappresenta le coordinate del carico da depredare. Determinare tale somma.

6. La corsa mattutina

Prima di diventare un temibile π-rata, l'armaiolo e spadaccino dilettante Will Turing si teneva allenato facendo tutti i giorni una corsetta dalla sua bottega nella città alta fin giù al molo, distante 5km, tornando poi per la stessa strada. Will spiega a Elizabeth che nei tratti in piano la velocità media della sua corsa era di 20 km/h; nei tratti in discesa si lanciava fino a raggiungere una media di 30 km/h, mentre in salita (pant... pant...) non riusciva che a fare i 15 km/h di media. Will sfida Elizabeth a indovinare quanto tempo impiegava tutti i giorni per la sua corsetta. Al massimo, quanti secondi potevano essere?

7. La bussola impazzita

La bussola di Jack Disparrow non indica quasi mai il nord. A mezzanotte di un certo giorno la bussola indica il nord e inizia a muoversi seguendo questo algoritmo: ogni 5 minuti l'ago si sposta improvvisamente in avanti di 90 gradi e poi torna altrettanto istantaneamente indietro di un numero di gradi pari a 6 volte il numero dei minuti passati fino a quel momento iniziando a contare dalla mezzanotte. Per quanti minuti nel corso di una settimana la bussola indica esattamente il nord?

8. Osteria dei Sargassi

I π-rati della Perla Vera sono a cena presso l'osteria dei Sargassi; vogliono unire 5 tavoli quadrati (facendone combaciare dei lati) in modo da avere un'unica tavolata da 12 posti. (Un posto corrisponde a un lato libero di un quadrato). Quante tavolate soddisfano le richieste, considerando come distinte due tavolate che lo siano a meno di rotazioni (ma non di simmetrie)?

9. Al Perimetro del Mondo

Bourbakossa è infine riuscito a sottrarre la Mappa del Perimetro del Mondo al π-rata Sao Feng e la sta studiando comodamente sul suo vascello. Ruotando e spostando i vari pezzi mobili della Mappa, Bourbakossa fa comparire un esagono regolare. Successivamente aggiunge esternamente ad esso tutti i pentagoni regolari che può, in modo che abbiano tutti un lato in comune con la figura precedente, senza che si sovrappongano; ripete la procedura sui pentagoni facendo comparire tutti i possibili quadrati, e sui quadrati aggiungendo tutti i possibili triangoli equilateri, sempre in modo che non ci siano sovrapposizioni con quanto già costruito. Sia a il numero di poligoni regolari che compongono la figura finale e sia b la misura in gradi del più piccolo angolo non nullo che si viene a formare tra due qualsiasi lati con un vertice in comune. Quanto vale ab?

10. Per una mano in più

A causa dei continui duelli, la probabilità che un π-rata perda una mano in un combattimento è estremamente elevata. Per questo motivo, nella comunità dei π-rati la base di numerazione decimale è sostituita dalla numerazione in base 5. Ragetti, il mozzo dall'occhio di legno sta facendo il seguente gioco: scrive su un foglio tutti i numeri che, in base 5, si scrivono utilizzando una ed una sola volta tutte le cifre da 0 a 4 (lo 0 può essere anche in posizione iniziale). Infine, calcola la media di tutti i numeri che ha scritto. Che numero ha ottenuto, in base 10?

14 Pezzi meno facili

11. Chi cerca i favori di Davy Jensen?

Il π-rata maledetto Davy Jensen ha una borsa che contiene 90 tessere bianche della tombola (numerate da 1 a 90), più 1 singola tessera rosso sangue. Chiunque gli chieda i suoi favori, per sapere per quanti anni ne potrà godere, si sottopone al seguente gioco: estrae le tessere a caso una alla volta, fino a che non esce la tessera rossa. Chi gioca, avrà i favori per tanti anni quante sono le tessere bianche con un numero multiplo di 7 che sono uscite prima di quella rossa. Bill "Sputafuoco" Turing, che osserva in disparte, si domanda mediamente quanti anni si vincano in questo modo. Jack non capisce esattamente cosa intenda il suo collega π-rata, ma suo figlio Will, che ha studiato, gli spiega che tra i tanti modi di definire il numero medio di anni vinti (tutti che portano allo stesso risultato) quello più comune è la somma dei numeri $k \cdot p_k$ dove, per ogni numero naturale $0 \leq k \leq 12$, p_k è la probabilità che gli anni vinti siano k. Qual è il numero medio di anni vinti?
[Come risultato fornire il prodotto di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini]

12. La bocca del Cramer

Nessuno sa esattamente come sia fatta la bocca del Cramer (almeno nessuno è vissuto per raccontarlo). Una leggenda però parla di una particolare forma triangolare… Nel triangolo PQR sia $QR < PR < PQ$ e sia S l'intersezione fra la bisettrice dell'angolo esterno in P e la retta QR. Sia inoltre T l'intersezione fra la bisettrice dell'angolo esterno in R e la retta PQ. Sapendo che $SP = PR = RT$, trovare quanto misura l'angolo $Q\hat{R}P$. Rispondere in minuti di arco. (Un minuto di arco è $1/60$ di grado.)

13. Alzare la posta

Will Turing non ha mai mandato giù la sua sconfitta nel duello con Jack Disparrow, quando si sono conosciuti. Ogni anno, per 40 anni, si incontrano e duellano: entrambi puntano la stessa somma di denaro e alla fine uno dei due vince e si prende tutto il piatto. Il primo anno la puntata è $a_1 = 2010$ dobloni, poi gli anni successivi puntano una somma di denaro data dalla formula $a_{n+1} = 2a_n + 2n - 1$ dove $n = 1, .., 39$. Alla fine di questa grande sfida di 40 duelli Will risulta colui che ha vinto più dobloni ma Jack è comunque contento perché ha perso il minimo possibile. Quanti dobloni ha vinto Will?

14. Il talismano anti-Cramer

Jack è sempre più terrorizzato dal Cramer, che sente ovunque la sua presenza e cerca senza tregua la sua nave. La lady voodoo Tria Geome, usando i suoi poteri Geomistici, lo aiuterà a costruire un talismano che può tenere lontana la creatura. Gli spiega che dovrà fabbricare una sfera di creta sulla cui superficie dovrà tracciare due circonferenze mistiche. Queste circonferenze dovranno avere diametri di 50 e 36 cm, dovranno giacere su piani ortogonali, e dovranno toccarsi in due punti distanti 14 cm. Quanti *millimetri* dovrà misurare il diametro della sfera di creta?

15. L'organo del capitano

Come tutti i capitani malinconici, anche Davy Jensen suona l'organo, e ne ha fatto installare sull'Olandese Secante uno molto particolare, che ha 9999 tasti numerati a 1 a 9999. Di questi tasti sono bianchi tutti e soli quelli il cui numero può essere scritto come $[2x] + [4x] + [8x] + [12x]$ per qualche x reale. Gli altri sono neri. Quanti sono i tasti bianchi? (Si ricorda che il simbolo $[\cdot]$ denota la *parte intera*, quindi se y è un numero reale, $[y]$ denota il più grande intero minore o uguale a y.)

16. Il delirio di Jack Disparrow

Jack alla fine non è riuscito a sfuggire al Cramer, che se lo è pappato con tutta la Perla Vera. Ora, prigioniero oltre il Perimetro del Mondo, è in preda alle allucinazioni. Dall'albero maestro della Perla Vera guarda in basso e vede 144 granchi sassosi che cominciano a muoversi disponendosi ai vertici di un poligono regolare di 144 lati. Ancora in preda alle allucinazioni si domanda quanti siano i triangoli non congruenti che hanno vertici nei vertici del poligono. Qual è la risposta? (Si ricorda che in particolare triangoli simmetrici rispetto ad una retta sono congruenti.)

17. Lo scrigno di Davy Jensen

Jack e il suo equipaggio sono prigionieri nello scrigno di Davy Jensen, le acque mistiche oltre il Perimetro del Mondo. Al tramonto Capitan Disparrow capisce come tornare nel mondo dei vivi: occorre rovesciare la nave in modo che navighi sottosopra, e contemporaneamente occorre trovare tre interi positivi a, b, c, tali che $a + b + c = 2010$ e che si possano rovesciare anche loro, ottenendo che $1/a + 1/b + 1/c = 1/58$. Mentre con un verde baleno i π-rati tornano nel mondo dei vivi, rispondere il minimo comune multiplo dei tre interi.

18. La bussola di Jack Disparrow

La magica bussola che è in possesso di Jack Disparrow è stata creata da Tria Geome, usando rigorosi criteri Geomistici. La forma della bussola infatti è un esagono ottenuto come segue: si parte da un triangolo rettangolo con cateti che misurano un numero intero di mm; si costruiscono sui suoi lati i tre quadrati (esterni); si uniscono infine a due a due i vertici dei quadrati che non stanno sul triangolo, in modo da ottenere un esagono convesso. Sapendo che l'area dell'esagono misura 1922 mm^2, determinare l'area del triangolo di partenza.

19. Il cruccio di Cutler Bracket

La fratellanza dei π-rati nobili si raduna in un luogo segreto detto la Città dei Relitti. Per comunicarne le coordinate ai nuovi affiliati, si usano dei messaggi in codice, comprensibili solo da veri π-rati. Lord Bracket ne ha intercettato uno e da un po' si scervella senza successo: "Le coordinate sono tre numeri interi positivi a, b, c tali che nessuno dei tre è multiplo di un altro,

$$mcm(a,b) \cdot mcm(b,c) \cdot mcm(a,c) = a \cdot b \cdot c \cdot MCD(a,b,c)$$

e il valore di $a + b + c$ è il minimo possibile." Quanto vale $a + b + c$?

20. Il cane con le chiavi

Dopo l'ennesimo voltafaccia, Jack Disparrow è rinchiuso in una cella dell'Olandese Secante. Immancabilmente compare Spiffy, il cane con le chiavi, e Jack tenta di attirarlo senza successo. Dal buio della cella emerge Bill "Sputafuoco" Turing, che gli spiega: "Il cane risponde solo a chi conosce i numeri magici a e b e pronuncia il loro prodotto. Ti darò qualche indizio: a è un intero positivo di due cifre distinte; b si ottiene da a scambiandone le cifre; la differenza $a^2 - b^2$ è un quadrato perfetto ed è, inoltre, la minima possibile." Che numero deve pronunciare Jack per attirare Spiffy?

21. Le due mappe

Esistono due mappe che conducono all'Isla de Mono. Sulla prima mappa, di forma quadrata e di lato 1726 miglia, i 4 porti maggiori della Compagnia delle Indie orientali si trovano ognuno su un lato; per una strana coincidenza, la seconda mappa ha questi stessi quattro porti come vertici, ha ancora forma quadrata, ma ha lato 1250 miglia. Entrambe le mappe sono divise in quadratini di lato 1 miglio con linee color sangue parallele ai lati. Jack sa che, sia nella prima che nella seconda mappa, l'Isla de Mono sta esattamente all'incrocio di due delle linee color sangue (compresi i bordi delle mappe). Non sa però quali siano queste linee. Quanti sono in tutto i punti in cui può trovarsi l'isola?

22. Il segreto di Monkey Island™

Tutti i π-rati con qualche anno sulle spalle hanno sentito parlare del favoloso tesoro nascosto nella perduta Isla de Mono; la leggenda narra che il tesoro sia sepolto in un punto dell'isola in cui l'altitudine è di almeno 5 metri. Tria Geome possiede forse l'unica mappa dell'isola, dalla quale si deduce che:

- la pianta è un pentagono circoscrittibile (ovvero che ammette una circonferenza *in*scritta, tangente a tutti i lati);
- la profondità del mare attorno all'isola è pari a $\sqrt{\pi}$ volte la distanza minima dalla costa misurata sulla cartina, mentre l'altitudine di ogni punto della superficie dell'isola è pari a $\sqrt{\pi}/2$ moltiplicato per la minima distanza di quel punto dall'acqua, misurata sulla cartina;
- l'area racchiusa sulla cartina dai punti che sono a 1 metro di profondità è 12343 m^2 mentre quella racchiusa dai punti che sono a 3 metri di profondità è 12835 m^2.

Quanti m^2 misura sulla cartina la parte dell'isola nella quale secondo la leggenda si può trovare il tesoro?

23. Una trappola per i polli.

Appiedato a Tortuga, Mastro Gibbs si guadagna da vivere truffando i passanti con il gioco d'azzardo. Il malcapitato estrae a caso da un sacchetto un numero da 1 a 10000. Inizia quindi iterativamente a sostituirlo con il prodotto delle sue cifre, e perde se in un qualunque momento scende strettamente sotto 9. Vince invece se riesce a ottenere indefinitamente numeri non inferiori a 9. Qual è la probabilità di vincere?
[Come risultato fornire il prodotto di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini]

24. La Città dei Relitti

La roccaforte inespugnabile della fratellanza dei π-rati nobili è costruita interamente con il legno dei relitti di navi arenate. La forma è quella di quattro coni identici, appoggiati su un terreno piatto in modo che i vertici si tocchino, le loro superfici laterali siano tangenti al terreno su 4 segmenti uguali e perpendicolari che formano una croce e due coni adiacenti abbiano le superfici laterali tangenti. Scrivere le prime quattro cifre dopo la virgola del rapporto tra l'altezza e il raggio di base dei coni.