



Cesenatico 2010

XI GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale B – 7 Maggio 2010



Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Regole di ingaggio

La più prestigiosa gara di matematica per π -rati dei Caraibi è la Big Whoop Cup, che quest'anno si giocherà il 7 maggio, nell'anno del signore 1726. Capitan Jack Disparrow, aiutato dal fedele amico Mastro Gibbs, approda a Tortuga per reclutare una nuova ciurma per la sua nave, la Perla Vera. All'ennesimo candidato π -rata che si presenta con l'aria sbronza, Jack chiede: "Se n è la risposta a questa domanda, quanto fa $\frac{(n-1)(n-3)+6}{2}$?". Che cosa dovrà rispondere il π -rata per essere ammesso nella ciurma di Jack?

2. Una pergamena di gran valore

Capitan Disparrow sta studiando la mappa di un tesoro sulla quale sono segnati tre punti A, B e C, che sono vertici di un triangolo isoscele. La base AB del triangolo misura 4,4 km e l'angolo al vertice è di 120 gradi. Capitan Disparrow si trova nel punto B e sa che il tesoro si trova nel punto d'intersezione tra il lato BC e la bisettrice dell'angolo in A. Quanti metri dovrà percorrere per arrivare al tesoro?

3. La resa dei conti

La ciurma della Perla Vera è divisa in due fazioni: i π -rati reclutati da Capitan Jack Disparrow, che dicono sempre la verità, e quelli arruolati dal temibile Bourbakossa, che mentono sempre e stanno tramando di ammutinarsi. Alla resa dei conti finale, ben 7776 membri della ciurma si dispongono in cerchio sul ponte della nave. Ognuno di essi dice ad alta voce: "Dei miei due vicini uno è stato reclutato da Jack e l'altro da Bourbakossa". Sapendo che nel cerchio è presente anche Mastro Gibbs, che è stato il primo ad essere reclutato da Jack, quanti saranno in totale quelli che *non* si ammutineranno?

4. A vele spiegate

La bussola del pirata Tom², oltre a indicare sempre la direzione del tesoro, fornisce anche l'ora di arrivo stimata ipotizzando che la nave viaggi direttamente verso la meta alla velocità costante di 12 nodi (un nodo di velocità corrisponde a 1 miglio all'ora). L'Olandese Secante, il vascello su cui è imbarcato Tom², sta andando dritta filata verso il tesoro alla sua massima velocità. Sapendo che l'orario di arrivo stimato dalla bussola cala di 1 minuto ogni 8 miglia percorse, a quanti nodi di velocità va la nave?

[Come risultato fornire il *prodotto* di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini]

5. Bandiera al vento

Purtroppo l'ammutinamento è riuscito, Jack Disparrow è stato abbandonato su un'isoletta deserta e la Perla Vera è caduta nelle mani di Bourbakossa, che fa issare le sue insegne: la sua bandiera è un grosso triangolo nero su cui sono rappresentati tante volte tre simboli pirateschi. Sulla prima riga è rappresentata una scimmia. Sulla seconda riga una scimmia ed un forziere. Sulla terza riga una scimmia, un forziere ed una mela. Sulla quarta riga ancora una scimmia, un forziere, una mela ed un'altra scimmia, e così via: sull' n -esima riga ci sono n simboli ottenuti ripetendo nell'ordine scimmia, forziere e mela. Il triangolo conta in tutto 2010 righe: qual è la differenza tra il numero di scimmie ed il numero di mele?

6. Il triangolo di Tortuga

Sull'isola di Tortuga ha grande importanza una targa commemorativa detta il Triangolo di Tortuga. È apparentemente identica al triangolo di Tartaglia, ma ogni sua riga è dedicata ad un anno dal 1600 al 1726 e i numeri riportati rappresentano il numero di π -rati imbarcati per ciascuna delle navi π -rata che sono affondate in quell'anno. Ad esempio nel 1600 (1) è affondata una sola nave con un solo π -rata, nel 1601 (1, 1) sono colate a picco due navi con un π -rata ciascuna, nel 1602 (1, 2, 1) sono affondate tre navi, con uno, due e un π -rata rispettivamente, e così via. Il superstizioso Mastro Gibbs spiega che di queste sono diventati vascelli fantasma tutte e sole quelle con una ciurma dispari. Quanti vascelli fantasma sono comparsi in questo periodo di tempo?

7. Il forziere azteco

Il forziere con l'oro azteco è vuoto e tutte le antiche monete dovranno essere recuperate prima che la maledizione sia sciolta. Il pirata fantasma Bourbakossa ha sguinzagliato i suoi uomini a cercare per ogni dove, e intanto cerca di ricordarsi quante erano le monete quando il forziere è stato trovato. L'unico indizio è un appunto sul giornale di bordo di Capitan Jack Disparrow che dice: "...le monete azteche sono in quantità pari al più piccolo intero positivo $a = n^5 + 4n^4$, tale che n è un numero naturale ed a è il quadrato di un intero dispari." Quante monete devono cercare i π -rati di Bourbakossa?

8. Optimiser!

Quando la bella Elizabeth Somm finisce prigioniera di Bourbakossa, invoca il "optimiser" per essere risparmiata, ma scopre con rammarico che per renderlo efficace con dei veri π -rati, le viene chiesto di trovare il più grande intero positivo a tale che $a^2 + 200a + 1$ sia un quadrato perfetto. Cosa deve rispondere?

9. Faticosa evasione

Jack Disparrow con l'aiuto di Will è scappato dalla sua cella che si trova al piano più basso della torre-prigione e vuole salire al piano più alto, da dove spera di riuscire a fuggire. La prigione è composta da 222 piani, numerati da 1 a 222 e collegati da un certo numero di rampe di scale. Dal piano 1 al 2 c'è 1 sola rampa di scale con 1 solo gradino. Dal piano 2 al 3 ci sono 2 rampe con 1 e 2 scalini rispettivamente; dal piano 3 al 4, ci sono 3 rampe con 1, 2 e 3 scalini; e così via. Quanti scalini ci sono, in media, tra un piano e l'altro?

10. Macabra spartizione

La Perla Vera ha messo le mani su un favoloso bottino non superiore a 100000 dobloni. Jack si accorge che riesce a dividere esattamente il bottino tra i π -rati della ciurma. Improvvisamente però arriva Mastro Gibbs che gli dice: "Capitano, abbiamo perso un uomo". Jack si mostra addolorato solo per un attimo, ma poi scrolla le spalle, agita il cappello sorridente e informa i π -rati della ciurma che la divisione esatta del bottino è ancora possibile, e ciascuno in questo modo avrà esattamente 13 dobloni in più. Quanti possono essere al massimo i dobloni che alla fine toccheranno a ciascun π -rata?

11. Temi tu la tombola di Davy Jensen?

Il π -rata maledetto Davy Jensen ha una borsa che contiene 90 tessere bianche della tombola, più 1 singola tessera rosso sangue. Ogni prigioniero sulla sua nave, l'Olandese Secante, si sottopone al seguente gioco per sapere quanti anni dovrà servire sulla nave: estrae le tessere a caso una alla volta e le dispone a triangolo (1, poi 2, poi 3, ..., fino a 13). Il malcapitato dovrà servire tanti anni quante sono le righe del triangolo più lunghe di quella in cui compare la tessera rossa. Bill "Sputafuoco" Turing, che osserva in disparte, si domanda mediamente quanti anni di servizio tocchino in questo modo. Jack non capisce esattamente cosa intenda il suo collega π -rata, ma suo figlio Will, che ha studiato, gli spiega che tra i tanti modi di definire il numero medio di anni di servizio (tutti che portano allo stesso risultato) quello più comune è la somma dei numeri $k \cdot p_k$ dove, per ogni numero naturale $0 \leq k \leq 12$, p_k è la probabilità che gli anni di servizio siano k . Qual è il numero medio di anni di servizio?

[Come risultato fornire il *prodotto* di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini]

12. La cattura di Cauchyppo

La fratellanza dei π -rati è formata dai 9 π -rati nobili più Teague Disparrow, il padre di Jack. Ciascuno dei membri possiede una delle carte di un mazzo di 10 tarocchi magici, numerati con le cifre da 0 a 9. Per catturare Cauchyppo in forma umana, i π -rati devono disporre tutte le carte in modo da formare con esse 2 numeri di 5 cifre (nessuno dei quali inizia con zero) che siano l'uno il doppio dell'altro e in modo tale che siano i più piccoli possibili. Quali sono le ultime 4 cifre del minore dei due?

13. Un avido bucaniere

Le spade fabbricate dal giovane Will Turing sono celebri per la loro qualità e possono essere vendute a caro prezzo. Will vuole finanziare la prossima avventura vendendo le sue spade a Tortuga, ma deve decidere quante fabbricarne e a che prezzo venderle. Se chiede un prezzo di 70 dobloni o meno è sicuro che tutti i 10000 π -rati di Tortuga ne vorranno una. Se però fissa un prezzo superiore, per ogni doblone in più venderà 50 spade in meno. Sapendo che fabbricare ogni spada gli costa 10 dobloni, supponendo che fissi un prezzo tale da massimizzare i suoi guadagni, quanti pirati compreranno la propria spada da Will?

14. Una rotta ingegnosa

La Perla Vera è braccata dal Cramer, il terribile mostro marino scatenato da Davy Jensen, e sta cercando di raggiungere la terra prima di lui. L'isola più vicina è un punto che si trova esattamente 10 miglia a nord della nave. Siccome il vento non è di poppa ma un po' laterale, Capitan Disparrow imposta una rotta che alterna continuamente due direzioni diverse: verso nord-est (30 gradi rispetto al nord) la nave va a 5 m/s, mentre verso nord-ovest (60 gradi rispetto al nord) la nave va a 3 m/s. Il Cramer parte da un punto 10 miglia più a sud della nave e si muove verso nord a velocità costante. Qual è la massima velocità del Cramer che permette alla Perla Vera di arrivare all'isola per prima? Rispondere in cm/s.

15. Lo scrigno spettrale

Non è semplice aprire lo scrigno che custodisce il cuore di Davy Jensen: il prode Will Turing dispone già della chiave, ma ora è in crisi, perché ha scoperto che lo scrigno ha ben 4 serrature (una per lato). Per fortuna la chiave in suo possesso va bene per tutte le serrature, ma per sbloccare il meccanismo che apre lo scrigno, bisogna far fare 2 giri ad ogni serratura, in un ordine preciso che Will non conosce; sa solo che il primo giro (ma non il secondo) va dato sulla serratura anteriore. Per quante volte Will dovrà, al massimo, provare a sbloccare il meccanismo per esser sicuro di aprire lo scrigno?

16. Scontro tra i flutti

La Perla Vera rischia di essere inghiottita in un vortice! Quest'ultimo ha la forma di un quadrilatero $OABC$, tutto contenuto in un semicerchio di centro O e diametro AD . Il punto B sta sulla semicirconferenza e l'angolo BOA misura 60 gradi. L'Olandese Secante dà battaglia da un punto E della semicirconferenza tale che EOD misura 30 gradi. Il punto C appartiene al segmento DE oppure all'arco EB , ma purtroppo la vedetta non è sicura. Sapendo che AD misura 48 m, quanti metri quadrati può misurare, al massimo, l'area del vortice?