XXVII OLIMPIADE ITALIANA DI MATEMATICA

Cesenatico, 6 maggio 2011

SOLUZIONI

1. È dato un trapezio con le basi lunghe 1 e 4, rispettivamente. Lo suddividiamo in due trapezi mediante un taglio parallelo alle basi, lungo 3. Vogliamo ora suddividere i due nuovi trapezi, sempre mediante tagli paralleli alle basi, in m ed n trapezi, rispettivamente, in modo che tutti gli $m + n$ trapezi ottenuti abbiano la stessa area. Determinare il minimo valore possibile per $m + n$ e le lunghezze dei tagli da effettuare per realizzare tale minimo valore.

Soluzione: Sia $ABCD$ il trapezio, con AB base maggiore, e siano P e Q gli estremi del taglio già effettuato, posti rispettivamente su AD e BC. Si prolunghino i lati obliqui fino a farli incontrare in un punto che chiamiamo E; i triangoli DCE, PQE, ABE sono simili (hanno tutti gli angoli congruenti grazie al parallelismo delle rette DC, PQ, AB). Sappiamo che $PQ/DC = 3$ e $AB/DC = 4$, da cui, detta S la misura dell'area del triangolo DCE, si ottengono i rapporti di aree: $Area(PQE)/S = 3^2 = 9$, $Area(ABE)/S = 4^2 = 16$.

Ne deriva che, per differenza, $Area(PQCD) = 8S$ e $Area(ABQP) = 7S$. Supponiamo di dividere in m parti il trapezio $PQCD$, in n parti il trapezio $ABPQ$; affinché le parti abbiano tutte area uguale, dovrà risultare $8S/m = 7S/n$, ovvero $8n = 7m$, e dunque m dev'essere multiplo di 8 ed n multiplo di 7. Come minimo $m+n$ dovrà valere $7 + 8 = 15$.

Per suddividere il trapezio iniziale in 15 parti dobbiamo realizzare 14 tagli (contando anche quello di lunghezza 3 effettuato all'inizio); chiamiamo P_i e Q_i (rispettivamente su AD e BC) gli estremi dell'i-esimo taglio (in ordine di lunghezza: in questo modo P coinciderà con P_8 e Q con Q_8). L'area del trapezio P_iQ_iCD vale i volte l'area di una singola parte, che è uguale ad S, da cui $Area(P_iQ_iE) = (i + 1)S$. Come prima, i triangoli P_iQ_iE e DCE sono simili; il rapporto fra lati corrispondenti vale quanto la radice quadrata del rapporto fra le aree (che è $i + 1$); dunque $P_iQ_i = \sqrt{i+1}$. In conclusione, i tagli sono lunghi $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{15}$, e consentono di suddividere il trapezio iniziale in esattamente 15 parti.

2. Una sequenza di interi positivi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ è detta *scaletta* di lunghezza n se è composta da n numeri consecutivi, in ordine crescente.

(a) Dimostrare che per ogni intero positivo n esistono due scalette di lunghezza n, senza elementi in comune, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$, tali che per ogni i tra 1 ed n il massimo comune divisore fra a_i e b_i è uguale a 1.

(b) Dimostrare che per ogni intero positivo n esistono due scalette di lunghezza n, senza elementi in comune, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$, tali che per ogni i tra 1 ed n il massimo comune divisore fra a_i e b_i è maggiore di 1.

Soluzione: (a) Fissiamo n numeri consecutivi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Sia ora d un numero più grande di n che non abbia fattori comuni con nessuno tra $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (ad esempio, un numero primo più grande di a_n), poniamo $b_1 = a_1 + d, b_2 = a_2 + d, \ldots, b_n = a_n + d$; allora $a_1, a_2, \ldots a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sono due scalette di lunghezza n disgiunte fra loro e tali che, per ogni i tra 1 ed n, il massimo comune divisore fra a_i e b_i è uguale a 1: infatti, se esistesse un fattore comune di a_i e b_i, questo sarebbe un fattore anche di $b_i - a_i = d$, e questo è impossibile, perché d e a_i non hanno fattori in comune.

(b) Analogamente a prima fissiamo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ consecutivi, con $a_1 > 1$; prendiamo poi un intero $d > n$ che abbia fattori in comune con ognuno degli elementi $a_1, \ldots, a_n$ (ad esempio, il prodotto $a_1a_2 \cdots a_n$), e fissiamo $b_1 = a_1 + d, b_2 = a_2 + d, \ldots, b_n = a_n + d$. Anocra una volta le scalette $a_1, a_2, \ldots a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sono disgiunte fra loro, ma in questo caso a_i e b_i hanno sempre un fattore in comune: infatti a_i e d hanno sempre un fattore in comune, e quindi lo stesso è vero per a_i e $d + a_i = b_i$.

3. Su una lavagna sono scritti dei numeri interi, compresi fra 1 e 7. È possibile che non tutti i numeri da 1 a 7 siano presenti, ed è anche possibile che uno, alcuni o tutti i numeri siano ripetuti, una o più volte.

Una mossa consiste nello scegliere uno o più numeri presenti sulla lavagna, purché tutti diversi, cancellarli, e scrivere al loro posto i numeri che, unitamente a quelli cancellati, formano l'intero insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Ad esempio, mosse consentite sono:

- cancellare un 4 ed un 5, e scrivere al loro posto i numeri 1, 2, 3, 6 e 7;
- cancellare un 1, un 2, un 3, un 4, un 5, un 6 ed un 7 senza scrivere niente al loro posto.

Dimostrare che, se è possibile trovare una sequenza di mosse che, partendo dalla situazione iniziale, porti ad avere sulla lavagna un unico numero (scritto **una sola volta**), allora questo numero non dipende dalla sequenza di mosse utilizzata.

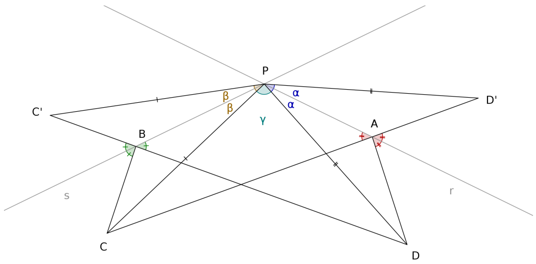
Soluzione: Chiamiamo n_1 il numero di cifre 1 presenti in un certo momento sulla lavagna, n_2 il numero di cifre 2, e così via fino ad n_7.

Ogni volta che si fa una mossa, ognuna di queste molteplicità cambia di 1 (e quindi inverte la sua parità), perché ogni numero tra 1 e 7 viene scritto o cancellato. Supponiamo che dopo una sequenza di k mosse rimanga sulla lavagna un unico numero, diciamo x; n_x ha cambiato parità k volte ed è infine dispari; tutte le altre molteplicità, cambiando parità anch'esse k volte, risultano infine uguali a zero, quindi pari.

Anche nella situazione iniziale, perciò, n_x deve avere parità diversa da ogni altra molteplicità. Non esiste quindi alcuna sequenza di mosse che porti ad avere sulla lavagna un'unica copia di un numero y diverso da x: n_y dovrebbe partire con parità diversa da tutte le altre molteplicità, ma abbiamo già stabilito che ha la stessa parità di n_z per tutti i numeri z diversi da x.

4. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso. Sia P l'intersezione delle bisettrici esterne di $D\widehat{A}C$ e $D\widehat{B}C$.
Dimostrare che $A\widehat{P}D = B\widehat{P}C$ se e solo se $AD + AC = BC + BD$.

[**Nota** : Si ricorda che la bisettrice esterna ad un angolo è la retta passante per il vertice dell'angolo e perpendicolare alla bisettrice interna (cioè l'usuale bisettrice) dell'angolo stesso.]



Soluzione: Chiamiamo r ed s rispettivamente le bisettrici esterne di $D\widehat{A}C$ e $D\widehat{B}C$. Si costruiscano i punti C' e D' rispettivamente come simmetrico di C rispetto a s e come simmetrico di D rispetto a r. Poiché r è bisettrice esterna si ha che C', B e D sono allineati e in più per costruzione $C'B = CB$; quindi $C'D = C'B + BD = BC + BD$. Allo stesso modo $D'C = AD + AC$. Chiamiamo ora $\beta = B\widehat{P}C$ che è uguale per costruzione a $B\widehat{P}C'$ e nello stesso modo $\alpha = A\widehat{P}D = A\widehat{P}D'$. Chiamiamo infine $\gamma = C\widehat{P}D$.
Consideriamo ora i triangoli $C'PD$ e CPD'. Abbiamo per costruzione $PD' = PD$ e $PC' = PC$; pertanto i due triangoli sono uguali se e solo se i due angoli in P sono uguali o, equivalentemente, se e solo se il terzo lato è uguale. Ma la prima condizione dice che $C'\widehat{P}D = 2\beta + \gamma = 2\alpha + \gamma = C\widehat{P}D'$, che equivale ad $\alpha = \beta$, mentre la seconda condizione dice che $CD' = C'D$ che, per quanto dimostrato sopra, equivale a $AD + AC = BC + BD$.

5. Determinare tutte le soluzioni (p, n) dell'equazione

$$n^3 = p^2 - p - 1$$

dove p è un numero primo e n è un numero intero.

Soluzione: Le soluzioni dell'equazione sono $(p, n) = (2, 1)$ e $(p, n) = (37, 11)$.

Riscriviamo l'equazione nella forma

$$p(p - 1) = (n + 1)(n^2 - n + 1).$$

Osserviamo innanzitutto che per ogni intero n il valore di n^2-n+1 è positivo, quindi tutti i fattori dell'equazione scritta devono essere positivi, Abbiamo due casi.

<u>Primo caso: $p \mid n + 1$.</u>

Per qualche intero positivo m abbiamo $n+1 = mp$ e $p-1 = m(n^2-n+1)$. Ma allora $n^2-n+1 \leq p-1 < p \leq n+1$, quindi $n = 1$ e $p = 2$. Sostituendo nell'equazione iniziale, si verifica che in effetti $(2, 1)$ è una soluzione.

<u>Secondo caso : $p \mid n^2 - n + 1$.</u> Per qualche intero positivo m abbiamo $n^2 - n + 1 = mp$ e $p - 1 = m(n + 1)$. Sostituendo il valore di p dato dalla seconda equazione nella prima equazione, otteniamo

$$n^2 - (m^2 + 1)n - (m^2 + m - 1) = 0.$$

Quest'ultima equazione ha soluzioni intere se e solo se il suo discriminante

$$\Delta = m^4 + 6m^2 + 4m - 3 = (m^2 + 3)^2 + (4m - 12)$$

è il quadrato di un numero intero. Questo è certamente vero se $4m - 12 = 0$, ossia se $m = 3$. Sostituendo questo valore, otteniamo $n = 11$ e $p = 37$, soluzione dell'equazione iniziale ($n = -1$ non dà soluzioni accettabili).

D'altra parte, non ci sono altri valori di m per cui Δ è un quadrato perfetto. Infatti, è immediato vedere che se $m > 3$ si ha $(m^2+3)^2 < \Delta < (m^2+4)^2$; nei casi rimanenti, si ha per sostituzione diretta che se $m = 1$ allora $\Delta = 8$ e se $m = 2$ allora $\Delta = 21$.

Quindi le soluzioni dell'equazione sono $(p, n) = (2, 1)$ e $(p, n) = (37, 11)$.

6. Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Vogliamo colorare, usando k colori, tutti i sottoinsiemi di 3 elementi di X in modo tale che, comunque se ne scelgano due disgiunti, abbiano colori distinti.

Dimostrare che:

(a) 4 colori sono sufficienti;

(b) 3 colori non sono sufficienti.

Soluzione: (a) Usiamo i colori 1, 2, 3, 4. Per ogni sottoinsieme A di X sia m_A il massimo dei suoi elementi. Assegniamo al sottoinsieme A il colore

$$\max\{1, m_A - 4\}.$$

Se due sottoinsiemi A e B sono disgiunti, allora almeno uno fra m_A ed m_B è maggiore o uguale a 6, quindi due sottoinsiemi disgiunti non possono avere entrambi il colore 1. D'altra parte, se due sottoinsiemi A e B hanno entrambi un colore $r > 1$, allora $m_A = m_B$, quindi A e B non sono disgiunti.

(b) Numeriamo i vertici di un cubo con i numeri naturali $1, 2, \ldots, 8$. e ad ogni sottoinsieme di tre elementi $\{a, b, c\}$ facciamo corrispondere il baricentro del triangolo con vertici $\{a, b, c\}$. D'ora in poi useremo questa corrispondenza per indicare punti del cubo invece che sottoinsiemi di 3 elementi.

Dimostreremo ora che 3 colori non sono sufficienti per colorare tutti i punti. Consideriamo dapprima solo i punti che appartengono alle facce del cubo. Innanzitutto, è chiaro che i sottoinsiemi corrispondenti a punti su facce opposte sono disgiunti, quindi tutti i punti su una faccia devono avere colore diverso da tutti i punti sulla faccia opposta. Supponiamo ora, per assurdo, che per colorare tutti i punti (e quindi, in particolare, tutti i punti che giacciono sulle facce del cubo) siano sufficienti 3 colori. Allora, data una qualunque coppia di facce opposte, i punti di almeno una di esse avranno lo stesso colore (se ci fossero almeno 2 colori su una faccia ed almeno 2 nella faccia opposta, ci vorrebbero 4 colori). Vi sono allora almeno 3 facce del cubo F_1, F_2, F_3, a due a due non parallele, "monocromatiche". Siccome sono a due a due non parallele, due qualsiasi di queste facce si intersecano in uno spigolo, e tutte e tre si intersecano in un vertice. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che il loro vertici siano rispettivamente $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, e, f\}$, $\{a, c, e, g\}$.

I colori di queste tre facce devono essere diversi, in quanto, per esempio, il punto della prima faccia corrispondente ad $\{a, c, d\}$ deve avere colore diverso dal punto della seconda faccia corrispondente a $\{b, e, f\}$ (e analogamente per le altre coppie di facce).

Consideriamo ora l'antipodo h del vertice a. Il baricentro del triangolo con vertici $\{f, g, h\}$ deve avere colore diverso dai baricentri dei triangoli $\{a, b, c\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, e\}$ giacenti rispettivamente sulle facce $F_1.F_2, F_3$, e quindi è necessario un quarto colore, e questo dà una contraddizione.

Soluzione alternativa di (b): Immaginiamo di aver colorato i sottoinsiemi di 3 elementi di X con tre soli colori. Consideriamo un qualunque sottoinsieme Y di X composto di quattro elementi, e chiamiamo $Y^{(3)}$ la famiglia formata da tutti i sottoinsiemi di tre elementi di Y; diremo che $Y^{(3)}$ è monocromatica se tutti gli insiemi che contiene hanno lo stesso colore; che è 2-colorata se vi compaiono esattamente 2 colori; 3-colorata se vi compaiono tutti e tre i colori.
Osserviamo che, qualunque sia Y, $Y^{(3)}$ non può essere 3-colorata, perché una qualsiasi terna in $(X \setminus Y)^{(3)}$ (dove $X \setminus Y$ è l'insieme dei 4 elementi di X che non appartengono a Y) è disgiunta da tutte quelle in $Y^{(3)}$, e dunque dovrebbe essere colorata di un quarto colore. Allo stesso modo si osserva che, se $Y^{(3)}$ è 2-colorata, allora $(X \setminus Y)^{(3)}$ è monocromatica del colore che manca in $Y^{(3)}$.
Ne deriva che il numero di quaterne Y per cui $Y^{(3)}$ è monocromatica è almeno metà del numero di sottoinsiemi di 4 elementi di X; in particolare, è maggiore o uguale a $\binom{8}{4}/2$, ovvero a 35. Per il principio dei cassetti, dato che abbiamo a disposizione solamente 3 colori, vi sono $35/3$ (e dunque 12) quaterne $Y_1 \ldots Y_{12}$ tali che le famiglie

$Y_i^{(3)}$ (i compreso fra 1 e 12) siano monocromatiche, tutte per il medesimo colore.
È facile rendersi conto che ciò contraddice le ipotesi sulla colorazione. L'intersezione fra Y_i e Y_j (i e j distinti fra 1 e 12) deve contenere almeno tre elementi: se così non fosse esisterebbero due terne disgiunte, una in $Y_i^{(3)}$ e l'altra in $Y_j^{(3)}$, cui avremmo dovuto assegnare colori diversi. Siano $Y_1 = \{a, b, c, d\}$, $Y_2 = \{a, b, c, e\}$; abbiamo solamente due casi possibili per le quaterne Y_i con i fra 3 e 12: che Y_i contenga esattamente due elementi di $\{a, b, c\}$, e sia d che e (il che dà luogo ad al più 3 quaterne distinte); che Y_i contenga $\{a, b, c\}$ e un altro elemento di X distinto sia da d che da e (il che dà luogo ad al più altre 4 quaterne distinte). Ne deriva che non possiamo avere 12 quaterne diverse che differiscano per al più un elemento l'una dall'altra, e quindi che 3 colori non sono sufficienti.

Seconda soluzione alternativa di (b): Facciamo vedere che tre colori (diciamo, Arancione, Bianco e Celeste) non possono bastare. Supponiamo dunque di avere una colorazione lecita con tre colori e cerchiamo di trovare un assurdo. Per brevità, scriveremo 123=A, oppure 367=B per indicare che la terna {1, 2, 3} è colorata di Arancione, o che la {3, 6, 7} è colorata di Bianco, e così via.

Step 1: Osserviamo che ci devono essere due terne con due elementi in comune e colore diverso.

Se infatti ogni volta che due terne hanno due elementi in comune devono avere lo stesso colore, allora si avrebbe 123=124=145=456, ma 123=456 è impossibile.

Step 2: Dimostriamo ora la tesi.

Grazie allo Step 1, a meno di permutazioni si ha 123=A e 124=B. Questo assicura che tutte le terne fatte con elementi di {5, 6, 7, 8} devono essere di colore C; di conseguenza, ogni terna che contiene *esattamente un elemento* all'interno di {5, 6, 7, 8} è sicuramente *non* di colore C. Ora si ha che certamente $356 \neq 478$, quindi non possono essere C entrambe le terne. È dunque vero che 356=A oppure che 478=B (o anche entrambe le cose). Per simmetria, possiamo supporre che si abbia 356=A. Ma allora si hanno le seguenti identità (ogni uguaglianza si deduce dalle precedenti tramite la regola e tramite l'osservazione di sopra sulle terne con un solo elemento in {5, 6, 7, 8}).

$$123 = \mathrm{A},\ 124 = \mathrm{B},\ 356 = \mathrm{A},\ 127 = \mathrm{B},\ 348 = \mathrm{A},\ 125 = \mathrm{B},\ 478 = \mathrm{C},\ 256 = \mathrm{B}\,.$$

Ma allora 147 non può essere A per colpa di 356=A, non può essere B per colpa di 256=B, e non può essere C perché ha solo un elemento in {5, 6, 7, 8}. L'assurdo mostra la tesi.