XXVIII OLIMPIADE ITALIANA DI MATEMATICA

Cesenatico, 4 maggio 2012

SOLUZIONI

1. Sui lati di un triangolo ABC rettangolo in A vengono scelti tre punti D, E ed F (rispettivamente su BC, AC e AB) in modo che il quadrilatero $AFDE$ sia un quadrato. Se x è la lunghezza di un suo lato, dimostrare che

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

Soluzione: Visto che i denominatori non sono nulli, l'uguaglianza da dimostrare è equivalente a $AB \cdot AC = AC \cdot x + AB \cdot x$. Considerando poi che x è il lato del quadrato, possiamo ancora riscrivere la tesi come

$$AB \cdot AC = AC \cdot DE + AB \cdot DF.$$

Ora $AB \cdot AC$ è il doppio dell'area di ABC, $AC \cdot DE$ è il doppio dell'area di ADC e $AB \cdot DF$ è il doppio dell'area di ABD. Poiché il triangolo ABC è unione dei due triangoli ADC e ABD, che si intersecano solo nel segmento AD, la tesi è dimostrata.

Seconda soluzione: Il triangolo BDF è simile al triangolo BCA, poiché entrambi sono rettangoli e hanno l'angolo in B in comune.

Abbiamo quindi la seguente proporzione tra i lati

$$BF : BA = DF : CA$$

e dal momento che $BF = AB - AF = AB - x$ e $DF = x$ questa si traduce in $(AB - x) : AB = x : AC$. Questo implica $AB \cdot x = (AB - x) \cdot AC$, e cioè $AB \cdot x + AC \cdot x = AB \cdot AC$, che è quanto volevamo dimostrare.

2. Determinare tutti gli interi positivi che sono uguali a 300 volte la somma delle loro cifre.

Soluzione: Dimostreremo che c'è un'unica soluzione, ossia $n = 2700$.

Sia n un intero positivo che soddisfa la condizioni date. Osserviamo immediatamente che, poiché n è un multiplo di 300, e quindi di 100, le cifre delle unità e delle decine di n devono essere uguali a zero. Supponiamo dunque che la che la sua scrittura decimale sia $n = a_k a_{k-1} \cdots a_2 00$, dove, come di consueto, la prima cifra a_k è diversa da zero. Abbiamo

$$n = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \cdots + 100 a_2 \geq 10^k$$

e, poiché tutte le cifre sono minori o uguali a 9,

$$s := a_k + a_{k-1} + \cdots + a_2 \leq 9(k-1).$$

Dall'ipotesi $n = 300s$ abbiamo, per le disuguaglianze precedenti, $10^k \leq 300 \cdot 9(k-1) = 2700(k-1)$. Verifichiamo per induzione che quest'ultima disuguaglianza è falsa per $k \geq 4$: il passo base è la verifica che $10^4 > 2700 \cdot 3 = 8100$; per il passo induttivo, supponiamo che $10^k > 2700(k-1)$: allora $10^{k+1} > 10^k \cdot 2 > 2700(2k-2) > 2700(k-2)$.

Ne segue che $k \leq 3$. Dunque n è della forma $10^3 a_3 + 10^2 a_2$ (in questo caso sarebbe a priori consentito anche $a_3 = 0$, anche se come vedremo questo non si verifica). L'equazione $n = 300s$ diventa $1000a_3 + 100a_2 = 300a_3 + 300a_2$, che a sua volta si semplifica in

$$7a_3 = 2a_2.$$

Da quest'ultima equazione si ricava che 7 è un divisore di a_2, dunque l'unica possibilità per avere un intero positivo è $a_2 = 7$ e di conseguenza $a_3 = 2$. D'altra parte il numero così trovato, $n = 2700$, soddisfa effettivamente le condizioni del problema.

3. Sia n un intero maggiore o uguale a 2. Ci sono n persone in fila indiana, ognuna delle quali è o un furfante (e mente sempre) oppure un cavaliere (e dice sempre la verità). Ogni persona, eccetto la prima, indica una delle persone davanti a lei e dichiara “Questa persona è un furfante” oppure “Questa persona è un cavaliere”. Sapendo che ci sono strettamente più furfanti che cavalieri, dimostrare che assistendo alle dichiarazioni è possibile determinare per ognuna delle persone se si tratta di un furfante o di un cavaliere.

Soluzione: Diremo che due persone sono *dello stesso tipo* se sono entrambe cavalieri o entrambe furfanti, che sono *di tipo diverso* altrimenti.

Notiamo che, se la persona A indica la persona B e la dichiara cavaliere, allora A e B sono dello stesso tipo: entrambi cavalieri (se A dice la verità) o entrambi furfanti (se A mente). Viceversa, se A dichiara B furfante, significa che A è un cavaliere e B un furfante, oppure A un furfante e B un cavaliere: A e B sono di tipo diverso.

Numeriamo le persone da 1 a n secondo l'ordine della fila, stabilendo che la persona 1 sia quella che si trova più avanti (e non vede nessuno davanti a sé). Possiamo ora dedurre dalle dichiarazioni, per ciascuna persona dalla seconda all'n-esima, se essa è o no dello stesso tipo della persona numero 1; in particolare, la dichiarazione di 2 ci permette di determinarlo per 2, le dichiarazioni di 2 e 3 assieme lo determinano per 3, e così le dichiarazioni delle persone dalla seconda alla k-esima determinano se quest'ultima è o meno dello stesso tipo della prima. Il motivo è il seguente: la persona 2 indica necessariamente la prima, ed è del suo stesso tipo se la dichiara cavaliere, di tipo diverso altrimenti. La persona 3 indica 1 o 2: di entrambi, grazie all'affermazione di 2, conosciamo se il tipo è lo stesso di 1, e di conseguenza possiamo dedurlo per 3. Allo stesso modo procediamo nell'ordine fino alla persona n.

Supponiamo che vi siano m persone del tipo di 1 (persona numero 1 compresa) e $n - m$ persone dell'altro tipo. Sappiamo che devono essere presenti più furfanti che cavalieri, dunque m sarà strettamente maggiore o strettamente minore di $n - m$.

Nel primo caso possiamo dedurre che 1 e tutte le persone del suo tipo sono furfanti, gli altri cavalieri; viceversa nel secondo caso.

4. Sia $x_1, x_2, x_3, \ldots$ la successione definita per ricorrenza come segue:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = x_1 x_2 x_3 \cdots x_n + 5 \qquad \text{per } n \geq 1. \end{cases}$$

(I primi termini della successione sono quindi $x_1 = 4$, $x_2 = 4 + 5 = 9$, $x_3 = 4 \cdot 9 + 5 = 41$, ...)
Trovare tutte le coppie di interi positivi $\{a, b\}$ tali che $x_a x_b$ è un quadrato perfetto.

Soluzione: Dimostreremo che l'unica coppia che soddisfa le condizioni del problema è $\{1, 2\}$. (Chiaramente si ha una soluzione anche se $a = b = n$ per ogni n, ma in questo caso $\{a, b\}$ non è una coppia; aver o non aver considerato questo caso è comunque ininfluente ai fini della valutazione).

Possiamo ovviamente supporre, per simmetria, $a > b$.

Per $n \geq 2$, sfruttando il fatto che $x_1 ... x_{n-1} = x_n - 5$, possiamo scrivere anche $x_{n+1} = (x_1 ... x_{n-1})\, x_n + 5 = (x_n - 5)x_n + 5 = x_n^2 - 5x_n + 5$.

Osserviamo che per $a > b$ si ha $x_a = x_1 ... x_b ... x_{a-1} + 5$, quindi, se un primo divide sia x_a che x_b, allora divide $x_a - x_1 ... x_b ... x_{a-1} = 5$.

Tuttavia, 5 divide $x_{n+1} = x_n^2 - 5x_n + 5$ se e solo se divide x_n: ne segue che se un termine della successione non è divisibile per 5, neanche il successivo lo è. Dato che x_1 non è divisibile per 5, nessun termine della successione è divisibile per 5.

Questo dimostra che x_a e x_b non hanno mai divisori primi in comune, quindi $x_a x_b$ è un quadrato perfetto se e solo se lo sono sia x_a che x_b: cerchiamo perciò quali quadrati perfetti ci siano nella successione.

Certamente $x_1 = 4$ e $x_2 = 9$ sono quadrati, quindi $\{1, 2\}$ è una soluzione.

D'altra parte, siccome $x_2 = 9$, per $n \geq 2$ il numero x_n è della forma $x_n = 9k+5$ e quindi, in particolare, dà resto 2 nella divisione per 3. Ora è facile verificare che nessun quadrato ha questa proprietà, in quanto il quadrato di un multiplo di 3 è un multiplo di 3 mentre il quadrato di un numero della forma $3m \pm 1$ è $9m^2 \pm 6m + 1$ e quindi dà resto 1 nella divisione per 3. Quindi non ci sono altre soluzioni oltre a quella trovata.

Alternativamente, in forma forse più elementare, visto che per $n \geq 2$ abbiamo $x_{n+1} = x_n^2 - 5x_n + 5$, possiamo studiare l'equazione $x^2 - 5x + 5 = a^2$ con x, a interi positivi.

Moltiplicando entrambi i membri per 4 otteniamo

$$4a^2 = 4x^2 - 20x + 20 = (2x-5)^2 - 5 \Rightarrow 5 = (2x-5)^2 - 4a^2$$
$$\Rightarrow (2x-2a-5)(2x+2a-5) = 5.$$

Siccome 5 è divisibile solo per $\pm 1, \pm 5$ e $2x+a-5 > 2x-a-5$, ci sono solo le due possibilità $2x+2a-5 = -1, 2x-2a-5 = -5$ e $2x+2a-5 = 5, 2x-2a-5 = 1$, che portano rispettivamente a $x = 1,\ a = 1$ e $x = 4,\ a = 1$. Il numero 1, comunque, non può comparire nella successione, perché $x_1 = 4$ e ogni termine è più grande del precedente.

Se ne deduce nuovamente che nella successione non compaiono quadrati perfetti, a parte $x_1 = 4, x_2 = 9$ (che non si esprimono nella forma $x^2 - 5x + 5$).

5. Sia $ABCD$ un quadrato. Si descriva il luogo di punti P del piano diversi da A, B, C, D per i quali

$$\widehat{APB} + \widehat{CPD} = 180^o.$$

Soluzione: Ricordiamo dapprima che, dati due punti A, B del piano e fissato un angolo α, il luogo dei punti Q tali che $\widehat{AQB} = \alpha$ è costituito dall'unione di due archi di circonferenza, uno per ogni semipiano individato dalla retta AB.
Identifichiamo innanzitutto il nostro luogo:

- le due diagonali del quadrato appartengono sicuramente al luogo, infatti se consideriamo $P \in AC$, allora, per simmetria, si ha $\widehat{APB} = \widehat{APD}$ e quindi si ha
$$\widehat{APB} + \widehat{CPD} = \widehat{APD} + \widehat{CPD} = 180^o;$$
- considerando la circonferenza circoscritta ad $ABCD$, gli archi AB e CD appartengono al luogo. Infatti per questi punti i due angoli $\widehat{APB}$ e $\widehat{CPD}$ sottendono due archi della medesima lunghezza, ed essendo uno acuto e uno ottuso, sono per forza supplementari.

Ora rimane da dimostrare che non ci sono altri punti del luogo al di fuori di questi. Notiamo che, se P è un qualsiasi punto del luogo, uno tra $\widehat{APB}$, $\widehat{CPD}$ deve essere di almeno 90^o e quindi sicuramente P è interno ad uno dei due cerchi che hanno come diametro rispettivamente AB e CD. In particolare quindi P appartiene alla striscia delimitata dalle rette BC e AD. Distinguiamo ora tra punti interni al quadrato e punti esterni:

- Sia Q interno al quadrato tale che $\widehat{AQB} = \alpha$ e $\widehat{CQD} = 180^o - \alpha$. Tuttavia, se $\alpha < 45^o$ tutti i punti che verificano $\widehat{AQB} = \alpha$ sono esterni al quadrato (la circonferenza sarÃ più grande di quella circoscritta ad $ABCD$); similmente non possono esserci punti del luogo interni al quadrato tali che $\widehat{CQD} < 45^o$. Dunque sicuramente devo avere $45^o \leq \alpha \leq 135^o$. Fissiamo un angolo α con questa proprietÃ .
Allora esistono esistono al più due punti che verificano $\widehat{AQB} = \alpha$ e $\widehat{CQD} = 180^o - \alpha$; infatti queste ultime due condizioni identificano (insieme all'essere interni al quadrato), come detto all'inizio, due archi di circonferenza, che si possono intersecare in al più due punti.
Tuttavia è facile notare che l'arco di circonferenza determinato dalla condizione $\widehat{AQB} = \alpha$, se $45^o < \alpha < 90^o$, lascia fuori i punti C e D e ha al suo interno il punto d'intersezione delle diagonali del quadrato O, quindi interseca sicuramente le due diagonali, in due punti distinti, che sappiamo appartenere al luogo. Quindi non possono essercene altri;
- Sia Q esterno al quadrato (ma sempre nella striscia di piano individuata dalle rette BC e AD), diciamo nel semipiano individuato da AB che non contiene il quadrato; tracciamo la perpendicolare ad AB che passa per Q; essa intersecherà l'arco AB della circonferenza circoscritta al quadrato esattamente in un punto che chiamiamo P. E' chiaro che se P è più vicino ad AB rispetto a Q allora
$$\widehat{AQB} < \widehat{APB} \qquad \widehat{CQB} < \widehat{CPB}$$
e quindi $\widehat{AQB} + \widehat{CQB} < \widehat{APB} + \widehat{CPB} = 180^o$ (l'ultima uguaglianza è perché P appartiene al luogo) e similmente ottengo che se P sta più lontano di Q allora $\widehat{APB} + \widehat{CPB} < 180^o$. Dunque necessariamente $P = Q$ e quindi non ci sono altri punti del luogo esterni al quadrato che non stanno sulla circonferenza circoscritta ad $ABCD$.

Soluzione alternativa (per la seconda parte): Sia P un punto del luogo situato nella striscia delimitata dalle rette AB e CD. Chiamiamo P' il traslato di P secondo il vettore $\vec{BC}$; allora, per costruzione, il quadrilatero $DP'CP$ risulta essere ciclico; ma allora, poiché si ha $PP' = CD$, avremo che, chiamando $\widehat{CPD} = \alpha$ e $\widehat{CP'D} = 180^o - \alpha$, si possono verificare due situazioni:

$$\widehat{PCP'} = \alpha \text{ e } \widehat{PDP'} = 180^o - \alpha \text{ o viceversa.}$$

Nel primo caso CP e DP' sono paralleli, quindi AP e CP sono paralleli, ossia P giace sulla diagonale AC. Nell'altro caso, simmetricamente, P giace sulla diagonale BD.

Se invece P si trova fuori dalla striscia sopra menzionata, diciamo nel semipiano individuato dalla retta AB non contenente il quadrato, consideriamo P' il simmetrico di P rispetto all'asse del segmento di BC; per costruzione di nuovo $PAP'B$ risulta ciclico e il centro della circonferenza circoscritta si troverà sull'asse di PP', che per costruzione è l'asse di BC, e anche anche sull'asse di AB. Dunque il centro di questa circonferenza è il centro del quadrato e, essendo A e B punti della circonferenza, lo sono anche B e C, per simmetria. Quindi la circonferenza circoscritta a $PAP'B$ è anche la circonferenza circoscritta al quadrato e dunque P si trova effettivamente sulla circonferenza circoscritta ad $ABCD$.

6. Determinare tutte le coppie $\{a, b\}$ di interi positivi con la seguente proprietà: comunque si colorino gli interi positivi con due colori A e B, esistono sempre due interi positivi del colore A con differenza a o due interi positivi del colore B con differenza b.

SOLUZIONE: Le coppie che soddisfano la condizione del testo sono quelle del tipo $a = 2^h \cdot (2x+1), b = 2^k \cdot (2y+1)$ dove $h \neq k$, ovvero le coppie tali che la massima potenza di 2 che divide i due numeri è diversa. Per prima cosa, mostriamo che per le coppie NON di questo tipo, ovvero del tipo $a = 2^h \cdot (2x + 1), b = 2^h \cdot (2y + 1)$ esiste una colorazione in cui non ci sono né due numeri del colore A distanti a né due numeri del colore B distanti b. La colorazione è la seguente:

$$\underbrace{AAA \ldots AA}_{2^h}\underbrace{BBB \ldots BB}_{2^h}\underbrace{AAA \ldots \quad}_{2^h}.$$

Infatti, in questa sequenza due numeri a distanza 2^h hanno sempre colore diverso, i numeri a distanza $2 \cdot 2^h$ hanno sempre colore uguale, i numeri a distanza $3 \cdot 2^h$ hanno sempre colore diverso, e così via; in particolare, quindi, numeri aventi distanza un multiplo dispari di 2^h hanno sempre colore diverso, che è quello che volevamo dimostrare. Dimostriamo ora che nel caso $a = 2^h \cdot (2x + 1), b = 2^k \cdot (2y + 1)$ con $h < k$ (senza perdita di generalità), per ogni colorazione esistono due numeri del colore A con differenza a o due numeri del colore B con differenza b. Supponiamo, per assurdo, che esista una colorazione in questo non sia vero, e consideriamo un numero n avente colore A (ovviamente esiste un numero colorato di A, altrimenti sarebbero tutti colorati di B e esisterebbero due numeri colorati di B a distanza qualsiasi); ora, necessariamente il numero $n+a$ dovrÃ essere di color B, e per lo stesso motivo i numeri $n + a + b$ e $n + a - b$ dovranno essere di colore A. In generale, muovendomi (in qualsiasi direzione, ma a condizione di rimanere nei numeri positivi) da un numero di un passo lungo $a + b$ oppure $a - b$ (quest'ultimo può anche essere negativo, ovvero un passo verso sinistra), finisco in un numero dello stesso colore; partendo da n, quindi, tutti i numeri positivi del tipo $n + r(a + b) + s(a - b)$ con r, s interi sono dello stesso colore A di n. (Osserviamo che ci si può muovere prima facendo passi in avanti e poi passi indietro, quindi non usando numeri negativi.)

Dimostriamo ora che tra questi numeri c'è anche il numero $n + a$, arrivando così ad una contraddizione. Sia $d = \mathrm{MCD}(a + b, a - b)$. Per il teorema di Bezout, i numeri della forma $r(a + b) + s(a - b)$ sono tutti e soli i multipli di d, quindi basta dimostrare che d è un divisore di a. Poiché $d|a + b$ e $d|a - b$, è evidente che $d|(a + b) + (a - b) = 2a$. Ne segue che $d = 2^\delta d_1$, dove $\delta \leq h + 1$ e $d_1|2x + 1$. D'altra parte, la massima potenza di 2 che divide sia $a + b$ che $a - b$ è 2^h, e quindi $\delta \leq h$, ossia $d|a$, come volevamo.