UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 1998

GARA di SECONDO LIVELLO

18 febbraio 1998

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI
2) La prova consiste di 17 problemi; i primi 15 sono a risposta multipla. Ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere **A, B, C, D, E**.
3) Ciascuna domanda ammette **una sola** risposta corretta. La lettera corrispondente alla risposta esatta dovrà, per ogni quesito, essere riportata in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.
4) Gli ultimi due problemi richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare la soluzione in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Ciascuno di questi problemi verrà valutato con un punteggio da 0 a 15.
5) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente

NOME:____________________ COGNOME:____________________

Indirizzo:____________________________ Città:______________

SCUOLA:______________________ CLASSE:_____ Città:______________

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte		$\times 5 =$	
numero degli esercizi senza risposta		$\times 1 =$	
valutazione esercizio n.16			
valutazione esercizio n.17			
PUNTEGGIO TOTALE			

Si ringraziano per la collaborazione
AGIP PETROLI, INTEL
Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.sns.it`

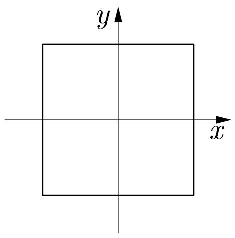
1. Ad una festa l'età media è 31 anni, l'età media degli uomini è 35 anni e l'età media delle donne è 25 anni. Qual è il rapporto fra il numero degli uomini e quello delle donne?

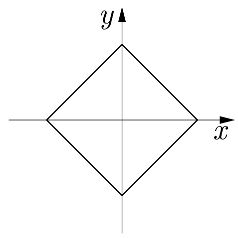
   (A) $\frac{5}{7}$ **(B)** $\frac{7}{5}$ **(C)** $\frac{4}{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$ **(E)** 2.

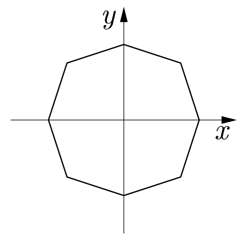
2. D è il dominio del piano cartesiano costituito dai punti $(x,\ y)$ tali che

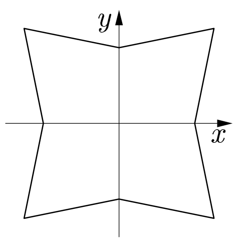
$$|x| + |y| + |x + y| + |x - y| \leq 3\ .$$

   La forma del dominio D è

(A) 

(B) 

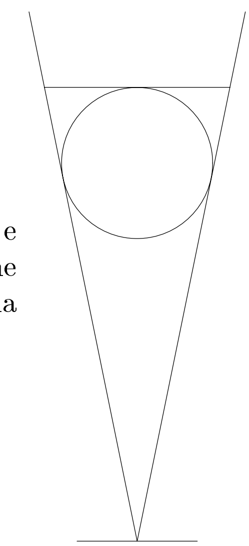
(C) 

(D) 

(E) nessuna delle precedenti.

3. La parte di nastro di un registratore avvolta su una bobina forma una corona circolare. Sapendo che dopo venti minuti di funzionamento il raggio maggiore della corona circolare è raddoppiato, quanto tempo dovrà continuare a funzionare il registratore affinché il raggio maggiore raddoppi nuovamente? (Il nastro scorre con velocità costante).

   (A) Venti minuti
   (B) quaranta minuti
   (C) un'ora
   (D) un'ora e venti minuti
   (E) dipende dal raggio interno della corona circolare.



4. In un bicchiere da cocktail di forma conica c'è una ciliegina di forma sferica e del liquore che ricopre esattamente la ciliegina, come in figura. Sapendo che il raggio della ciliegina è 1 cm e che l'altezza del liquore è 6 cm, calcolare la quantità di liquore.

   (A) $\frac{2}{3}\pi$ cm^3 **(B)** π cm^3 **(C)** $\frac{5}{3}\pi$ cm^3 **(D)** 2π cm^3
   (E) i dati sono insufficienti.

5. Massimo sa che camminando impiega 24 minuti per andare da casa sua alla stazione, mentre correndo ne impiega 12. Dovendo prendere un treno alle 12:30, parte da casa per tempo alle 12:00 (camminando). Durante il tragitto però si accorge di aver dimenticato il portafoglio. Immediatamente torna a casa di corsa, e poi corre in stazione, dove arriva puntuale alle 12:30. A che ora si è reso conto di aver dimenticato il portafoglio?

   (A) 12:06 **(B)** 12:09 **(C)** 12:12 **(D)** 12:15 **(E)** i dati sono insufficienti.

6. Il polinomio $ax^2 + bx + c$ assume valori interi per ogni valore intero della variabile x. Quale delle seguenti affermazioni **non** può essere dedotta?

   (A) c è intero
   (B) $a + b + c$ è intero
   (C) a, b, c sono interi
   (D) se a è intero anche b è intero
   (E) $2a$ è intero.

7. Tre amici partecipano a sei gare; chi vince la prima guadagna un punto, chi vince la seconda due, e così via. Sapendo che ognuno dei tre ha vinto due gare, qual è la probabilità che tutti abbiano ottenuto lo stesso punteggio?

   (A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{1}{9}$ **(D)** $\frac{1}{12}$ **(E)** $\frac{1}{15}$.

8. Per quali valori di λ l'equazione $\big||x| - 1\big| = \lambda$ ha esattamente tre soluzioni?

   (A) Per ogni $\lambda > 0$ **(B)** solo per $\lambda = 0$ **(C)** per ogni λ tale che $0 \leq \lambda \leq 1$
   (D) solo per $\lambda = 1$ **(E)** per nessun valore di λ.

9. Dato un cubo C, quanti sono i triangoli che hanno per vertici tre vertici di C e che non giacciono su nessuna delle facce di C?

   (A) 12 **(B)** 24 **(C)** 32 **(D)** 56 **(E)** 112.

10. Dato un triangolo ABC, siano A' il simmetrico di A rispetto a B, B' il simmetrico di B rispetto a C e C' il simmetrico di C rispetto ad A. Quanto vale l'area di $A'B'C'$?

    (A) 3 volte l'area di ABC
    (B) 4 volte l'area di ABC
    (C) 5 volte l'area di ABC
    (D) 6 volte l'area di ABC
    (E) 7 volte l'area di ABC.

11. Per quanti valori interi relativi di x il numero $|(x^2 + x - 1)(x^2 - 7x + 11)|$ è primo?

    (A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** più di 8.

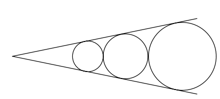
12. Una, ed una sola, delle seguenti affermazioni è falsa. Quale?

    (A) Andrea è più giovane di Bruno, che è più forte di Carlo
    (B) Andrea è più forte di Bruno, che è più giovane di Carlo
    (C) Bruno è più vecchio di Andrea
    (D) Bruno è più debole di Andrea
    (E) Bruno è più vecchio e più debole di Carlo.

13. Un prisma retto di altezza l e avente per base un esagono regolare di lato l viene tagliato con un piano passante per due spigoli paralleli appartenenti ciascuno ad una delle due basi, ma non appartenenti alla stessa faccia laterale. L'area della sezione risultante è:

    (A) l^2 **(B)** $\sqrt{3}l^2$ **(C)** $2l^2$ **(D)** $3l^2$ **(E)** $2\sqrt{3}l^2$.

14. Tre circonferenze C_R, C_x, C_r di raggio rispettivamente uguale a R, x, r, hanno i centri allineati. Si sa che C_R e C_r sono tangenti esternamente a C_x e che le tre circonferenze hanno due tangenti esterne in comune (come in figura). Noti r, R, quanto vale x?

    (A) $\frac{R+r}{2}$ **(B)** $\sqrt{Rr}$ **(C)** $\sqrt{R^2 - r^2}$ **(D)** $\frac{1}{1/r + 1/R}$
    (E) nessuna delle precedenti.

15. I numeri a, b sono interi positivi. Qual è il minimo valore positivo di $a + b$ affinchè $21ab^2$ e $15ab$ siano entrambi quadrati perfetti?

    (A) 16 **(B)** 26 **(C)** 36 **(D)** 46 **(E)** 56.

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Dato il triangolo ABC con $C\hat{A}B - A\hat{B}C = 90°$, detti M il punto medio di AB e H il piede dell'altezza relativa ad AB, dimostrare che il raggio della circonferenza circoscritta ad ABC è uguale ad HM.

SOLUZIONE

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Dato un numero intero positivo M la cui scrittura decimale è $a_n a_{n-1} \dots a_0$ (cioè M è uguale a $10^n a_n + \dots + 10a_1 + a_0$) con $0 \leq a_0, \dots, a_n \leq 9$, sia $f(M) = a_n + 2a_{n-1} + 2^2 a_{n-2} + \dots + 2^n a_0$ (si intende che se $M = a_0$, $f(M) = a_0$).

1) Si determini l'insieme X di tutti gli interi positivi per cui $f(M) = M$.

2) Si dimostri che, per ogni intero positivo M, la successione $M,\ f(M),\ f(f(M)),\ f(f(f(M))), \dots$ contiene un elemento di X.

SOLUZIONE