UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 1999

GARA di SECONDO LIVELLO

24 febbraio 1999

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI
2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi dal numero 13 al numero 15 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Come nel caso precedente, ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto** e non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) Gli ultimi due problemi richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare la soluzione in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Ciascuno di questi problemi verrà valutato con un punteggio **da 0 a 15**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente

NOME:____________________ COGNOME:____________________

Indirizzo:____________________ Città:____________________

SCUOLA:____________________ CLASSE:______ Città:____________________

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte		×5 =	
numero degli esercizi senza risposta		×1 =	
valutazione esercizio n.16			
valutazione esercizio n.17			
PUNTEGGIO TOTALE			

Si ringrazia per la collaborazione
AGIPPETROLI
Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.sns.it`

1. Un teatro ha 960 posti, divisi nelle tre sezioni platea, palchi, galleria. In platea ci sono 370 poltrone, mentre il numero di posti in galleria è inferiore di 290 rispetto a quello dei palchi. Quanti sono i posti nei palchi?
(A) 150 **(B)** 300 **(C)** 315 **(D)** 440 **(E)** nessuna delle precedenti.

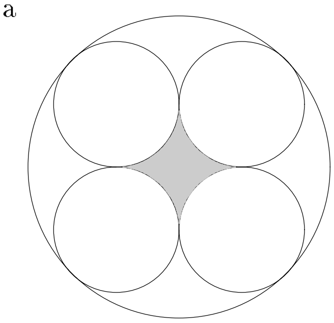
2. Quante soluzioni reali ha il sistema
$$\begin{cases} x^2y = 150 \\ x^3y^2 = 4500 \end{cases} ?$$
(A) Nessuna **(B)** una **(C)** più di una, ma meno di cinque
(D) un numero finito, ma almeno cinque **(E)** infinite.

3. Determinare l'area della parte di piano definita da
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \leq 0 \end{cases}$$
(A) $\dfrac{2\pi}{3} - 2$ **(B)** $\pi - \sqrt{3}$ **(C)** $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(D)** $\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ **(E)** nessuna delle precedenti.

4. Un cilindro retto X ed un cono retto Y hanno lo stesso raggio di base e la stessa altezza. Allora il rapporto fra le superfici laterali di X e Y:
(A) è sempre uguale al rapporto dei loro volumi
(B) può essere uguale al rapporto dei loro volumi (dipende dalle altezze)
(C) è sempre i 2/3 del rapporto dei loro volumi
(D) è sempre maggiore del rapporto dei loro volumi
(E) è sempre minore del rapporto dei loro volumi.

5. Una delle seguenti persone è "zio del fratello della figlia della nuora del padre di Alberto". Si tratta di:
(A) Alberto stesso **(B)** suo padre **(C)** suo nonno **(D)** suo figlio **(E)** suo suocero.

6. Determinare l'area della parte ombreggiata, sapendo che la circonferenza più grande ha raggio 1.
(A) $(2+\pi)(1+\sqrt{2})$ **(B)** $(2+\pi)(2-\sqrt{2})$ **(C)** $(4-\pi)(1+\sqrt{2})$
(D) $(4-\pi)(3-2\sqrt{2})$ **(E)** $(\sqrt{2}+\pi)(1+2\sqrt{2})$.



7. Quale delle seguenti affermazioni è vera nell'insieme dei numeri razionali?
(A) Per ogni x c'è un y tale che per ogni z si ha $x + y + z = x$
(B) per ogni x c'è un y tale che per ogni z si ha $x + y + z = z$
(C) per ogni x c'è un y tale che per ogni z si ha $xyz = x$
(D) per ogni x c'è un y tale che per ogni z si ha $xyz = z$
(E) nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

8. Sia M il minimo comune multiplo di tutti gli interi compresi fra 1 e 100. Quale dei seguenti numeri è un divisore di M?
(A) 1990 **(B)** 2000 **(C)** 2002 **(D)** 2004 **(E)** 2020.

9. Quante sono le soluzioni intere positive dell'equazione $x^x - 2^x - x^2 = 10$?
(A) Nessuna **(B)** una **(C)** due **(D)** più di due, ma un numero finito **(E)** infinite.

10. In un trapezio isoscele, una diagonale è lunga 22 cm; si sa inoltre che tale diagonale forma con la base maggiore un angolo di 45°. Quanto vale l'area del trapezio?
(A) 121 cm^2 **(B)** 242 cm^2 **(C)** 484 cm^2 **(D)** i dati sono insufficienti
(E) nessuna delle precedenti.

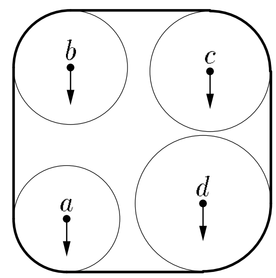
11. La professoressa Scappavia insegna matematica in una scuola in cui si fanno 6 ore al giorno di lezione, dal lunedì al venerdì. Il suo orario settimanale prevede 18 ore di insegnamento ed ella, per ragioni personali, gradirebbe non insegnare mai nell'ultima ora di lezione. La commissione che fa l'orario concede però alla professoressa solo di scegliere la suddivisione giornaliera delle sue ore di lavoro, dopodiché il suo orario verrà sorteggiato a caso. Quale delle seguenti disposizioni conviene scegliere alla professoressa per avere la maggior probabilità di non avere mai l'ultima ora di lezione?
(A) 5-5-4-2-2 **(B)** 5-4-4-3-2 **(C)** 4-4-4-4-2 **(D)** 4-4-4-3-3 **(E)** sono tutte equivalenti.

12. Qual è la cifra delle unità del numero $2^{(2^1)} + 2^{(2^2)} + 2^{(2^3)} + 2^{(2^4)} + \ldots + 2^{(2^{1999})}$?
(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8.

13. Ad una gara a punti su pista partecipano nove concorrenti. Ad ogni traguardo intermedio vengono assegnati 9 punti al primo, 8 al secondo, 7 al terzo e così via fino ad assegnare 1 punto all'ultimo. Prima dell'ultimo sprint (in cui il punteggio assegnato vale doppio) la classifica vede al comando Abdujaparov con 2 punti di vantaggio su Boardman e 9 su Cipollini. Gli altri concorrenti hanno un distacco in punti tale da non consentire più loro di aggiudicarsi la gara.
Quanti sono i possibili differenti piazzamenti dei tre corridori nell'ultimo sprint che permettono a Cipollini di vincere la gara?

14. Quanti sono i numeri naturali che in base 10 si scrivono con 3 cifre e in base 2 si scrivono con 7 cifre?

15. Quattro ruote a, b, c, d collegate tramite una cinghia e aventi rispettivamente raggi 14, 15, 16 e 18 sono disposte come in figura in modo che il sistema sia libero di ruotare senza che la cinghia possa slittare. Dopo quanti giri della ruota a il sistema torna per la prima volta nella posizione iniziale?



16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**
Andrea torna dalla pesca con una borsa piena di pesci. Giunto a casa, dà al più grande dei suoi due gatti i tre pesci più grossi: così facendo il peso della borsa si riduce del 38%. A questo punto dà all'altro gatto i tre pesci più piccoli: così facendo il peso della borsa si riduce nuovamente del 38% (rispetto però al peso successivo alla nutrizione del primo gatto). Quanti pesci ha pescato Andrea? (Si trascuri il peso della borsa rispetto a quello dei pesci).

SOLUZIONE

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**
Dimostrare che un pentagono inscritto in una circonferenza e tale che ogni sua diagonale sia parallela ad un lato, è necessariamente regolare.

SOLUZIONE