XI GARA NAZIONALE A SQUADRE

Gara del pubblico – 8 Maggio 2010

Cesenatico 2010

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Il Bar Scumm™ [20]

All'alba dell'8 maggio 1726, Jack Disparrow, Bourbakossa e Elizabeth Somm siedono sbronzi al tavolo di un bar, quando si presenta un giovane dall'aria ingenua che dice di aver saputo che per diventare un π-rata deve rivolgersi in quel bar ai tre π-rati dall'aspetto importante. Tra il serio e il faceto, i tre amici gli sottopongono un quesito π-ratesco: "Quanti sono gli anni da adesso al 2726 che sono multipli della risposta a questa domanda?"

2. Otto uomini ed una cassa di rum [40]

Alla fine di una gustosa cena, 8 π-rati decidono di dividersi il conto così: prendono una cassa di rum cubica e ognuno sceglie uno degli 8 vertici e vi incolla lo scontrino del suo pasto. Poi scelgono casualmente una delle 24 rotazioni della cassa e ogni pirata paga lo scontrino che si trova sul suo vertice dopo la rotazione. Qual è la probabilità che almeno 2 pirati paghino il pasto che loro stessi hanno consumato?
[Come risultato fornire il *prodotto* di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini]

3. L'isola dei cannibali [30]

Will ha conosciuto a Tortuga un gruppetto di 9 selvaggi. L'arcipelago da cui provengono è composto da 3 isole per un totale di 10000 abitanti, compresi loro stessi. Si sa che gli abitanti di Isla Cruces sono sempre sinceri (ma anche cannibali), gli abitanti di Isla de Muerta mentono sempre, e gli abitanti di Isla de Mono possono essere sinceri o mentire. I nove si dispongono in fila, e a turno, l'n-esimo componente della fila afferma: "La mia isola ha non meno di n-mila abitanti". Si sa inoltre che nella fila ci sono 3 persone provenienti da ciascuna isola e che almeno uno dell'Isla de Mono ha detto la verità. Quant'è al massimo la differenza tra gli abitanti di Isla Cruces e quelli di Isla de Muerta?

4. La grande battaglia [20]

Nell'epico scontro tra la flotta dei π-rati e quella della Compagnia delle Indie Orientali, come si racconterà per generazioni, le n navi guidate da Capitan Jack Disparrow sconfissero le m navi della flotta di Lord Bracket, dove n ed m sono le soluzioni dell'equazione $x^2 - 102x + 1817 = 0$. Sapendo che su ognuna delle n navi di Disparrow c'erano n π-rati e che su ogni nave della Compagnia c'erano m militari, quanti in tutto parteciparono allo scontro?

5. I superstiti [25]

Dopo la battaglia Jack chiede a Mastro Gibbs: "Quanti uomini ci restano, a parte noi due?". La risposta è da vero π-rata: "Il numero, Capitan Disparrow, è la massima cardinalità di un sottoinsieme finito A degli interi positivi, tale che se m e n stanno in A, allora $\frac{m+n}{MCD(m,n)}$ sta in A." Jack si rallegra, ma quanti sarebbero?

6. Direzione corsara [35]

La bussola di Jack Disparrow non indica quasi mai il nord. A mezzanotte di un certo giorno la bussola indica il nord e inizia a muoversi seguendo questo algoritmo: ogni 15 minuti l'ago si sposta improvvisamente in avanti di 90 gradi e poi torna altrettanto istantaneamente indietro di un numero di gradi pari a 6 volte il numero dei minuti passati fino a quel momento iniziando a contare dalla mezzanotte. Per quanti minuti nel corso di una settimana la bussola indica esattamente il nord?

7. Mediangolo [60]

La pinna dorsale del pesce-martello che sta nella ciurma di Davy Jensen è un grosso triangolo le cui mediane misurano 25, 153 e 160 cm. Quanti cm^2 misura la sua area?

8. Chi cerca i favori di Davy Jensen? [65]

Il π-rata maledetto Davy Jensen ha una borsa che contiene 90 tessere bianche della tombola (numerate da 1 a 90), più 1 singola tessera rosso sangue. Chiunque gli chieda i suoi favori, per sapere per quanti anni ne potrà godere, si sottopone al seguente gioco: estrae le tessere a caso una alla volta, fino a che non esce la tessera rossa. Chi gioca, avrà i favori per tanti anni quante sono le tessere bianche con un numero primo che sono uscite prima di quella rossa. Bill "Sputafuoco" Turing, che osserva in disparte, si domanda mediamente quanti anni si vincano in questo modo. Jack non capisce esattamente cosa intenda il suo collega π-rata, ma suo figlio Will, che ha studiato, gli spiega che tra i tanti modi di definire il numero medio di anni vinti (tutti che portano allo stesso risultato) quello più comune è la somma dei numeri $k \cdot p_k$ dove, per ogni numero naturale $k = 0, 1, 2, \ldots$, p_k è la probabilità che gli anni vinti siano k. Qual è il numero medio di anni vinti? [Come risultato fornire il *prodotto* di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini]

9. Dominio territoriale [50]

Jack e Elizabeth, naufraghi sull'isoletta, si appropriano ciascuno di un appezzamento quadrato di terreno. I due quadrati hanno per lato un numero intero di metri, ma a sentire Jack, il suo è più grande: "Aah! La superficie del mio territorio, in m^2 ha le stesse cifre del tuo, ma tutte aumentate di 1." Sapendo che il lato del terreno di Jack non arriva a 300 metri, quanto può misurare, al massimo?

10. Un sistema di protezione [50]

Jack è sempre più terrorizzato dal Cramer, che sente ovunque la sua presenza e cerca senza tregua la sua nave. La lady voodoo Tria Geome, usando i suoi poteri Geomistici, lo aiuterà a costruire un talismano che può tenere lontana la creatura. Gli spiega che dovrà fabbricare una sfera di creta sulla cui superficie dovrà tracciare due circonferenze mistiche. Queste circonferenze dovranno avere diametri di 50 e 72 cm, dovranno giacere su piani ortogonali, e dovranno toccarsi in due punti distanti 40 cm. Quanti *millimetri* dovrà misurare il diametro della sfera di creta?

11. Tra 80 anni [60]

Le imprese dei π-rati dei Caraibi sono molto popolari, e le iscrizioni stanno aumentando. L'anno scorso, che era il 1725, l'unico nuovo π-rata era stato Will Turing, ma da allora ogni anno il numero di nuovi π-rati aumenta secondo la formula $c_{n+1} = 2^{c_n} + 1$, dove c_n rappresenta il numero di nuovi π-rati nell'anno n. Nel 1806 tutti i nuovi π-rati di quell'anno salperanno per festeggiare in mare, dividendosi in 1806 per nave, lasciando eventualmente i π-rati restanti a terra. Quanti π-rati resteranno a terra?

12. La ciurma della Perla [50]

La ciurma della Perla Vera è divisa in due fazioni: quelli fedeli a Jack, che dicono sempre la verità, e quelli fedeli a Bourbakossa che dicono sempre il falso. Tutti quanti si dispongono sul ponte in un rettangolo 1726×11 e ognuno dice ad alta voce per ciascuno di quelli accanto a lui: "Lui serve Jack" oppure "Lui serve Bourbakossa" indicandolo (quelli ai vertici diranno dunque 2 frasi, quelli sui lati ne diranno 3 e quelli interni ne diranno 4). Sapendo che ogni persona dice esattamente una volta "Lui serve Jack", quanti sono al massimo quelli fedeli a Jack?

13. I bastoncini di Filibunacci [80]

Will, Elizabeth, Capitan Disparrow e Capitan Bourbakossa non riescono a mettersi d'accordo sulla rotta da seguire e decidono di affidare la scelta alla sorte. Il mozzo Filibunacci prepara 7 bastoncini di lunghezza 1, 2, 3, 5, 8, 13 e 21 cm. Capitan Disparrow vince se estrae il bastoncino più corto tra tutti quelli estratti o se la somma tra la lunghezza del suo bastoncino e quello di Elizabeth è maggiore della somma degli altri due bastoncini estratti. Qual è la probabilità che capitan Disparrow vinca?
[Come risultato fornire il *prodotto* di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini]

14. Sette anni di duelli [65]

Will Turing non ha mai mandato giù la sua sconfitta nel duello con Jack Disparrow, quando si sono conosciuti. Ogni mese, per 7 anni, si incontrano e duellano: entrambi puntano la stessa somma di denaro e alla fine uno dei due vince e si prende tutto il piatto. Il primo mese la puntata è $a_1 = 1726$ dobloni, poi i mesi successivi puntano una somma di denaro data dalla formula $a_{n+1} = 2a_n + 2n - 1$, per $n = 1, 2, \ldots$. Alla fine di questa grande sfida di 7 anni, Will risulta colui che ha vinto più dobloni ma Jack è comunque contento perché ha perso il minimo possibile. Quanti dobloni ha vinto Will?

15. Lo scetticismo di Ragetti [70]

Ragetti, il mozzo dall'occhio di legno, è molto scettico nei confronti del lotto π-ratesco. Ha notato che succede insolitamente spesso che vengano estratti due numeri "vicini", cioè che hanno differenza minore o uguale a 2 (per esempio 17 e 19, o 27 e 28, ma non 46 e 49). Ben conoscendo i trucchi della filibusta, crede che questo sia un indice del fatto che il gioco è truccato. Sapendo che nel lotto π-ratesco si estraggono 6 numeri tra 1 e 90, sapreste dire in quante estrazioni su 10000 dobbiamo aspettarci che escano almeno due numeri vicini (se il gioco non è truccato)?

16. Il segreto di Monkey Island™ [80]

Tutti i π-rati con qualche anno sulle spalle hanno sentito parlare del favoloso tesoro nascosto nella perduta Isla de Mono; la leggenda narra che il tesoro sia sepolto in un punto dell'isola in cui l'altitudine è di almeno 4 metri. Tria Geome possiede forse l'unica mappa dell'isola, dalla quale si deduce che:

- la pianta è un pentagono circoscrittibile (ovvero che ammette una circonferenza *in*scritta, tangente a tutti i lati);
- la profondità del mare attorno all'isola è pari a $\sqrt{\pi}$ volte la distanza minima dalla costa misurata sulla cartina, mentre l'altitudine di ogni punto della superficie dell'isola è pari a $\sqrt{\pi}/2$ moltiplicato per la minima distanza di quel punto dall'acqua, misurata sulla cartina;
- l'area racchiusa sulla cartina dai punti che sono a 14 metri di profondità è 10456 m^2 mentre quella racchiusa dai punti che sono a 24 metri di profondità è 12736 m^2.

Quanti m^2 misura sulla cartina la parte dell'isola nella quale secondo la leggenda si può trovare il tesoro?