Primo Giorno

Mar del Plata, Argentina - 24 luglio 1997

1. Nel piano i punti a coordinate intere sono i vertici di quadrati unitari. I quadrati sono colorati alternativamente in bianco e nero (come su una scacchiera).

Per ogni coppia di interi positivi m e n, si consideri un triangolo rettangolo i cui vertici sono punti a coordinate intere e i cui cateti, di lunghezza m e n, giacciono lungo i lati dei quadrati unitari.

Sia S_1 l'area totale della parte nera del triangolo e sia S_2 l'area totale della sua parte bianca. Sia

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

(a) Calcolare $f(m,n)$ per tutti gli interi positivi m e n che sono entrambi pari o entrambi dispari.

(b) Dimostrare che per ogni m e n si ha $f(m,n) \leq \frac{1}{2}\max\{m,n\}$.

(c) Dimostrare che non esiste nessuna costante C tale che $f(m,n) < C$ per ogni m e n.

2. L'angolo $\widehat{BAC}$ è il piú piccolo fra gli angoli del triangolo ABC.

I punti B e C dividono la circonferenza circoscritta al triangolo in due archi. Sia U un punto interno all'arco compreso fra B e C che non contiene A.

Gli assi dei segmenti AB e AC intersecano la retta AU rispettivamente in V e W. Le rette BV e CW si intersecano in T.

Dimostrare che

$$AU = TB + TC.$$

3. Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numeri reali che soddisfano le condizioni seguenti:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$$

e

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2} \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dimostrare che esiste una permutazione $y_1, y_2, \ldots, y_n$ di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tale che

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

Ogni problema vale 7 punti.
Tempo: 4 ore e 30 minuti.