Secondo Giorno

Mar del Plata, Argentina - 25 luglio 1997

4. Una matrice (tabella) quadrata con n righe e n colonne, con elementi nell'insieme $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, viene chiamata una matrice *d'argento* se, per ogni $i = 1, \ldots, n$, l'unione della i-esima riga e della i-esima colonna contiene tutti gli elementi di S. Dimostrare che

(a) non esiste nessuna matrice d'argento per $n = 1997$;

(b) esistono matrici d'argento per infiniti valori di n.

5. Determinare tutte le coppie (a, b) di interi $a \geq 1$, $b \geq 1$ che soddisfano l'equazione

$$a^{b^2} = b^a.$$

6. Per ogni intero positivo n, sia $f(n)$ il numero di modi di rappresentare n come una somma di potenze di 2 con esponenti interi non negativi.

Due rappresentazioni che differiscono solo per l'ordine degli addendi sono considerate uguali. Per esempio $f(4) = 4$, poiché il numero 4 può essere rappresentato nei quattro modi seguenti: 4; $2+2$; $2+1+1$; $1+1+1+1$.

Dimostrare che, per ogni intero $n \geq 3$,

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

Ogni problema vale 7 punti.
Time: 4 ore e 30 minuti.