

Primo Giorno: 24 luglio 2002

Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti

Version: Italian

Problema 1.

Sia n un intero positivo. Sia T l'insieme dei punti (x, y) del piano tali che x, y sono interi non negativi con $x + y < n$. Ogni punto di T è colorato di rosso o di blu. Se un punto (x, y) è rosso, allora sono rossi anche tutti i punti (x', y') di T tali che $x' \leq x$ e $y' \leq y$. Diciamo che un insieme di n punti blu è un X -insieme se le coordinate x dei suoi punti sono tutte distinte. Diciamo che un insieme di n punti blu è un Y -insieme se le coordinate y dei suoi punti sono tutte distinte. Dimostrare che il numero degli X -insiemi è uguale al numero degli Y -insiemi.

Problema 2.

Sia BC un diametro della circonferenza Γ con centro O . Sia A un punto di Γ tale che $0^\circ < \widehat{AOB} < 120^\circ$. Sia D il punto medio dell'arco \widehat{AB} che non contiene C . La retta passante per O e parallela a DA interseca la retta AC in J . L'asse di OA interseca Γ in E e F . Dimostrare che J è il centro della circonferenza inscritta al triangolo CEF .

Problema 3.

Determinare tutte le coppie di numeri interi $m, n \geq 3$ tali che esistono infiniti interi positivi a per cui

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

è un intero.

Secondo Giorno : 25 luglio 2002

Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti.

Version: Italian

Problema 4.

Sia n un intero maggiore di 1. I divisori positivi di n sono d_1, d_2, \dots, d_k , dove

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n.$$

Definiamo $D = d_1d_2 + d_2d_3 + \dots + d_{k-1}d_k$.

- (a) Dimostrare che $D < n^2$.
- (b) Determinare tutti gli n per cui D è un divisore di n^2 .

Problema 5.

Sia \mathbb{R} l'insieme dei numeri reali. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

per tutti gli $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

Problema 6.

Nel piano, siano $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ delle circonferenze di raggio 1, con $n \geq 3$. Siano rispettivamente O_1, O_2, \dots, O_n i loro centri. Supponiamo che nessuna retta intersechi più di due di queste circonferenze. Dimostrare che

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$