

PRIMO GIORNO  
Tokyo, 13 luglio 2003

**Problema 1.** Sia  $A$  un sottoinsieme dell'insieme  $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$  avente esattamente 101 elementi. Dimostrare che esistono dei numeri  $t_1, t_2, \dots, t_{100}$  in  $S$  tali che gli insiemi

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, 100$$

siano a due a due disgiunti.

**Problema 2.** Determinare tutte le coppie di interi positivi  $(a, b)$  tali che

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

è un intero positivo.

**Problema 3.** Sia dato un esagono convesso in cui due lati opposti qualunque hanno la proprietà seguente: la distanza tra i loro punti medi è uguale a  $\sqrt{3}/2$  moltiplicato per la somma delle loro lunghezze. Dimostrare che tutti gli angoli dell'esagono sono uguali.

(Un esagono convesso  $ABCDEF$  ha tre coppie di lati opposti:  $AB$  e  $DE$ ,  $BC$  e  $EF$ ,  $CD$  e  $FA$ .)

Tempo: 4 ore e 30 minuti  
Ogni problema vale 7 punti

SECOND GIORNO  
Tokyo, 14 luglio 2003

**Problema 4.** Sia  $ABCD$  un quadrilatero convesso i cui vertici stanno su una circonferenza. Siano  $P, Q$  e  $R$  i piedi delle perpendicolari tracciate da  $D$  alle rette  $BC, CA$  e  $AB$  rispettivamente. Dimostrare che  $PQ = QR$  se e solo se le bisettrici degli angoli  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{ADC}$  si intersecano sulla retta  $AC$ .

**Problema 5.** Sia  $n$  un intero positivo, e siano  $x_1, x_2, \dots, x_n$  numeri reali con  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ .

(a) Dimostrare che

$$\left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2.$$

(b) Dimostrare che si ha l'uguaglianza se e solo se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  formano una progressione aritmetica.

**Problema 6.** Sia  $p$  un numero primo. Dimostrare che esiste un numero primo  $q$  tale che, per ogni intero  $n$ , il numero  $n^p - p$  non è divisibile per  $q$ .

Tempo: 4 ore e 30 minuti  
Ogni problema vale 7 punti