Italian version

SECONDO GIORNO

26 luglio 2007

Problema 4. In un triangolo ABC la bisettrice dell'angolo $\widehat{BCA}$ interseca la circonferenza circoscritta in R ($R \neq C$), l'asse di BC in P , e l'asse di AC in Q . Il punto medio di BC è K e il punto medio di AC è L . Dimostrare che i triangoli RPK e RQL hanno la stessa area.

Problema 5. Siano a e b interi positivi tali che $4ab - 1$ divide $(4a^2 - 1)^2$. Dimostrare che $a = b$.

Problema 6. Sia n un intero positivo. Si consideri

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

come un insieme di $(n + 1)^3 - 1$ punti nello spazio tridimensionale.

Determinare il minor numero possibile di piani la cui unione contiene tutti i punti di S ma non contiene $(0, 0, 0)$.

*Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti*