Mercoledì 16 luglio 2008

Problema 1. Sia ABC un triangolo acutangolo con ortocentro H. La circonferenza con centro il punto medio di BC e passante per H interseca la retta BC in A_1 e A_2. Analogamente, la circonferenza con centro il punto medio di CA e passante per H interseca la retta CA in B_1 e B_2, e la circonferenza con centro il punto medio di AB e passante per H interseca la retta AB in C_1 e C_2. Dimostrare che A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 giacciono su una medesima circonferenza.

Problema 2. (a) Dimostrare che

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1 \qquad (*)$$

per tutti i numeri reali x, y, z diversi da 1 e tali che $xyz = 1$.

(b) Dimostrare che esistono infinite terne di numeri razionali x, y, z, diversi da 1 e tali che $xyz = 1$, per i quali in $(*)$ vale l'uguaglianza.

Problema 3. Dimostrare che esistono infiniti interi positivi n tali che $n^2 + 1$ ha un divisore primo maggiore di $2n + \sqrt{2n}$.

Language: Italian

Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti