IV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Cesenatico, 10 maggio 2003

1. **La lotteria di Matelandia** **15 punti**

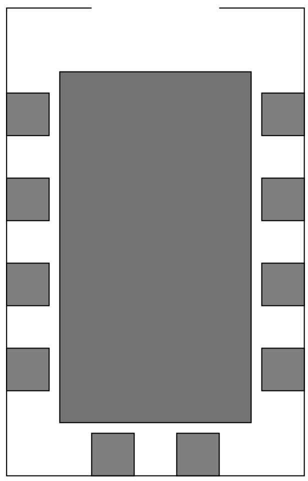
   Ogni anno, per riequilibrare le dissestate finanze della città, il comune di Matelandia organizza una lotteria. Quest'anno il biglietto vincente è il più grande numero di quattro cifre tale che la somma delle sue cifre elevata alla quarta dia il numero stesso. Qual è?

2. **Giochi inscatolabili** **25 punti**

   Nella camera dei giochi di un asilo della città ci sono 13 scatole a forma di cubo tutte di dimensioni diverse tra loro. Filippo, uno dei bambini che frequentano l'asilo, ha inventato il seguente gioco: prende una scatola qualsiasi (che non sia la più grande) e la mette dentro una scatola (ovviamente più grande di quella che ha già in mano) presa a caso tra le altre e va avanti con il gioco sempre allo stesso modo mettendo tutte le scatole prese fino a quel punto (che stanno una dentro l'altra) in una delle scatole non ancora scelte. Il gioco termina quando Filippo decide di mettere tutte le scatole già prese nella scatola più grande (anche se può darsi che alcune delle 13 scatole non siano state utilizzate). In quanti modi diversi Filippo può montare il suo gioco?

3. **La sala consiliare di Matelandia** **35 punti**

   La sala consiliare della città di Matelandia è molto piccola: ci stanno solamente 10 seggiole contro i muri di tre lati della stanza (l'ingresso è sul quarto lato) e un tavolo al centro.
   All'inizio di ogni riunione il sindaco entra per primo e i 9 consiglieri entrano rigorosamente in ordine di età: dal più anziano al più giovane.
   Il sindaco sceglie dove sedersi, mentre ciascuno dei consiglieri, a causa delle ristrettezze del luogo, deve sedersi accanto a qualcuno che si è già sistemato. In quanti modi diversi può disporsi il consiglio?

4. **Contabili distratti...** **20 punti**

   Nei libri contabili del comune è riportata l'addizione mostrata qui a fianco. L'addizione è errata, perché un contabile distratto ha sostituito tutte le occorrenze di una cifra c con una cifra differente d (eventualmente già presente). Quanto vale $c + d$?

$$\begin{array}{ccccccccc} & 7 & 4 & 2 & 5 & 8 & 2 & + \\ & 8 & 2 & 9 & 4 & 3 & 0 & = \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & \end{array}$$

5. **Feste di carnevale** **15 punti**

   Ogni martedì di carnevale il quartiere più ricco della città organizza un ballo in maschera. Quest'anno a mezzanotte, dopo che 15 dame sono andate via, al ballo c'è un numero di cavalieri pari al doppio del numero di dame rimaste. Poco dopo vanno via 45 cavalieri e allora vi sono 5 dame per ciascun cavaliere rimasto. Quante persone c'erano all'inizio?

6. **Uno scolaro pasticcione** **25 punti**

   Il quaderno di uno scolaro della scuola media Olenin si è rovinato: come compito a casa gli è stato assegnato di trovare le radici del polinomio di secondo grado $x^2 + \ldots + 12 = 0$ ma non riesce più a leggere il termine di primo grado, anche se si ricorda che il coefficiente è un numero intero. Tuttavia è pronto a scommettere che le due radici siano intere. In tal caso, quanti sono i polinomi di secondo grado che deve considerare?

7. **Polinomi pesanti** **25 punti**

I professori del liceo Kolmogorov amano mettere alla prova i loro allievi con problemi un po' bizzarri. Eccone uno.
Dato un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, di grado $n \geq 0$ a coefficienti interi con $a_n \neq 0$, associamo a P il suo peso $p = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$. Quanti sono i polinomi a coefficienti interi aventi peso pari a 3?

8. **Matelandesi spendaccioni** **15 punti**

Uno storico della città si è accorto che il deficit del bilancio segue alcune regole curiose. Infatti, se chiamiamo $f(n)$ il deficit dell'anno n dalla fondazione della città, allora $f(1) = 1$ e, per tutti i numeri naturali n, $f(2n) = 2f(n) + 1$. Quanto è stato il deficit nell'anno 1024–esimo dalla fondazione della città?

9. **E bravi i nostri allievi!!** **15 punti**

Nel liceo scientifico Kolmogorov (il più prestigioso della città) l'80% degli allievi sono bravi in matematica, il 75% sono bravi in ginnastica e il 70% sono bravi in inglese. Qual è la minima percentuale di allievi bravi in tutte e tre le discipline?

10. **Telefonate matematiche** **30 punti**

Determinate il prefisso telefonico della città di Matelandia, sapendo che è il massimo numero naturale di 4 cifre (in scrittura decimale) avente le seguenti proprietà:
a) La somma di tale numero e del suo palindromo è 7216
b) La somma delle cifre di tale numero è 17
c) Le cifre agli estremi differiscono al più di 4.

11. **Scherzi fra colleghi** **30 punti**

I tasti della calcolatrice di Gianmarco, uno degli impiegati della comune, sono disposti nel modo classico, come mostrato nella figura a sinistra. Il suo collega Nicola, per fargli uno scherzo, gli scombina la tastiera spostando i tasti in modo che risultino disposti come riportato a destra. Gianmarco, eseguendo il prodotto fra due numeri naturali (battendo correttamente le cifre sulla tastiera scombinata, pensando che sia giusta) ottiene 1996 mentre si aspettava di ottenere un numero di tre cifre. Qual è questo numero?

7	8	9
4	5	6
1	2	3
0		

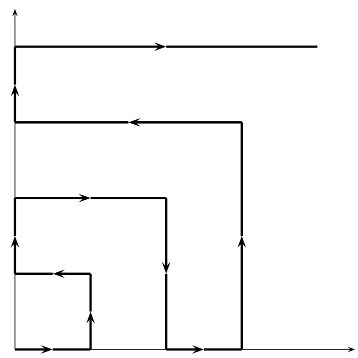
3	6	9
2	5	8
1	4	7
0		

12. **Mura poligonali** **20 punti**

Le mura della città di Matelandia formano un poligono regolare di n lati tale che i suoi angoli interni misurino un numero intero di gradi sessagesimali. Quanti poligoni diversi hanno questa proprietà?

13. **Tubi zigzaganti** **60 punti**

Le tubature della città sono state appena rifatte. Per controllare che tutto sia in ordine un piccolo robot si muove all'interno di esse a velocità costante (1 metro al minuto) lungo la traiettoria mostrata nella figura a fianco: nel primo minuto percorre un metro verso destra dal punto di partenza, poi verso l'alto, poi verso sinistra... In quale punto si troverà alla fine del 2003–esimo minuto? (nella risposta scrivere la somma delle coordinate)



14. **Ancora bravi allievi!** **40 punti**

Gli insegnanti dell'istituto Kolmogorov non sono mai contenti dei risultati dei loro allievi, e continuano a proporre esercizi sempre più intricati. Eccone un altro esempio.
Data l'equazione $A \log_{200} 5 + B \log_{200} 2 = C$, sapendo che $A + B + C = 9000$, e che A, B e C sono interi, quanto vale B?

15. **Ladri ingegnosi...** **50 punti**

La principale banca della città ha una cassaforte con una combinazione a quattro cifre, che per sicurezza il direttore cambia ogni giorno in questo modo: moltiplica la combinazione attuale per 3 ed eventualmente taglia la cifra più a sinistra. Una sera uno dei cassieri spiando il direttore scopre che la combinazione non contiene cifre dispari. La sera dopo una delle guardie giurate riesce a scoprire che nessuna delle cifre è multipla di 3. La sera successiva un ladro prova ad aprire la cassaforte e dopo vari tentativi si accorge che le cifre devono essere tutte multiple di 3, ma non riesce a penetrare nella cassaforte. Il giorno seguente il ladro ascolta per caso la guardia e il cassiere e viene a sapere ciò che avevano scoperto. Quale combinazione dovrebbe tentare il ladro tornando a svaligiare la banca quella sera stessa?

16. **Monumenti matematici** **65 punti**

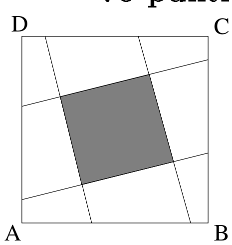
Nella piazza principale della città troneggia una stele di pietra. L'iscrizione della stele è un triangolo di numeri che ha sui lati i numeri 0, 1, 2, 3... come in figura. Ogni numero all'interno del triangolo è la somma dei due che gli stanno sopra. Indichiamo con $f(n)$ la somma dei numeri della riga che inizia col numero n. Qual è il resto della divisione di $f(100)$ per 100?

0
1 1
2 2 2
3 4 4 3
4 7 8 7 4
5 11 15 15 11 5

17. **Confetti... "laboriosi"** **85 punti**

Nella città di Matelandia si trova un rinomato confettificio, che produce due tipi di confetti alla mandorla. Il confetto di tipo A subisce tre lavorazioni successive: alla macchina I (durata 6 minuti) alla macchina II (durata 12 minuti) alla macchina III (durata 18 minuti). Il confetto di tipo B subisce anch'esso tre lavorazioni successive: alla macchina I (durata 18 minuti) alla macchina II (durata 12 minuti) alla macchina III (durata 6 minuti). Sapendo che in un giorno la macchina I funziona al massimo per 22 ore, la macchina II al massimo per 19 ore, la macchina III al massimo per 23 ore, in quanti modi è possibile scegliere la coppia di interi ≥ 0 (n_A, n_B), indicante il numero di ciascuno dei due tipi di confetti prodotti, in modo da non violare le condizioni poste sopra?

18. **Il centro commerciale di Matelandia** **70 punti**



Un architetto di grido è stato chiamato per progettare un enorme centro commerciale alla periferia della città. L'intero centro commerciale deve essere edificato in un quadrato $ABCD$ di lato 120 metri. Il progetto dell'architetto prevede che la pianta del centro commerciale sia l'intersezione di due parallelogrammi. Il primo di essi ha due lati opposti, ciascuno di lunghezza 60 metri, che giacciono rispettivamente sui lati AD e BC del quadrato, mentre il secondo ha due lati opposti (sempre di lunghezza 60 metri) che giacciono sui lati AB e CD.
Dette $S_{\max}$ la massima e $S_{\min}$ la minima area possibile della pianta del centro commerciale, quanto vale $S_{\max} - S_{\min}$?

19. **Sculture molto... geometriche** **85 punti**

Nel parco della città si trova un'interessante scultura astratta, che è stata ottenuta nel seguente modo. Dato un cubo di lato $L = 12$, si immagini di tagliarlo con un piano in modo da ottenere un esagono regolare e di costruire su quest'ultimo un prisma esagonale retto infinito. La scultura è l'intersezione del cubo con il prisma infinito. Qual è il suo volume?

20. **Riposi meritati** **80 punti**

Alla fine di una dura giornata di lavoro, Nicola e Gianmarco vanno a prendere un aperitivo in uno dei bar vicini al comune. Per passare il tempo giocano a una variante Matelandese dell'"uomo nero". All'inizio del gioco, Nicola possiede 3 carte (una cuori, una quadri e una fiori), mentre Gianmarco possiede 4 carte (una per ciascun seme).
Al primo turno di gioco, Nicola pesca a caso una carta tra quelle di Gianmarco e la ripone tra le proprie. A questo punto, se possiede due carte dello stesso seme le scarta entrambe, altrimenti le conserva tutte. Al turno successivo tocca a Gianmarco proseguire pescando una carta a caso da quelle di Nicola, e così via. Vince chi resta senza carte.
Qual è, in percentuale, la probabilità di vittoria di Nicola?

21. **Consiglieri... maldisposti** **50 punti**

Proprio oggi è in corso il consiglio di amministrazione della principale banca della città, convocato d'urgenza a causa del furto subito la notte scorsa. I sei consiglieri arrivano trafelati alla riunione e si siedono a caso ai sei posti della tavola rotonda che troneggia al centro della sala riunioni. Ognuno dei 6 consiglieri ha davanti a sé il segnaposto (mobile) che avrebbe dovuto indicargli dove sedersi. Visto il momento critico, decidono di restare tutti seduti al loro posto e di scambiarsi i segnaposto solo se due consiglieri seduti vicino hanno ciascuno il segnaposto dell'altro. Quante possono essere le diverse possibili distribuzioni dei segnaposto al termine di tutti gli scambi?
(Due distribuzioni di segnaposto che differiscono per una rotazione o una qualsiasi trasformazione di simmetria del tavolo sono da considerarsi distinte)

22. **C'è da posizionare uno zampillo...** **60 punti**

L'architetto chiamato a costuire il centro commerciale sta facendo alcuni studi per una fontana. Nel suo progetto la fontana è un triangolo equilatero di area 4500 cm^2, ma non ha ancora deciso dove posizionare lo zampillo. Preso un punto P all'interno del triangolo costruisce i tre punti simmetrici di P rispetto ai tre lati, e considera come punto in cui posizionare lo zampillo il baricentro G del triangolo che essi determinano. Al variare di P nel triangolo dato, qual è l'area in cm^2 del luogo descritto dai baricentri G, dove potrebbe venire a trovarsi lo zampillo?

23. **Il parco di Matelandia** **40 punti**

Il parco principale della città ha la forma di un trapezio. La sua base minore è lunga 90 metri e il segmento congiungente i punti medi delle diagonali è lungo 5 metri. Quanto misura la base maggiore?

24. **Un metodo complicato...** **45 punti**

All'ultima elezione della città Manolo e Michele, i due candidati alla carica di sindaco, hanno ottenuto gli stessi voti. Lo strano sistema elettorale matelandese prevede una complicata estrazione a sorte per stabilire chi dei due sarà il sindaco. Si prende una scatola contenente 5 palline numerate da 1 a 5. Per 3 volte si estrae una pallina, rimettendola dentro dopo aver letto il numero estratto. Detti a, b, c (nell'ordine) i tre numeri estratti. Michele diventa sindaco se $ab + c$ è pari, altrimenti diventa sindaco Manolo. Manolo, per ragioni di principio, protesta: a suo dire il complicato procedimento non è affatto equo. Qual è la probabilità che $ab + c$ sia pari?
(esprimere il valore in percentuale, se il risultato non è un numero intero scrivere nella risposta la parte intera del risultato)

Istruzioni generali

Si ricorda che in tutti i problemi occorre indicare come risposta un numero intero, compreso tra 0000 e 9999. Qualora la quantità richiesta non dovesse risultare un numero intero, si indichi la sua parte intera. Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
$\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7320$ $\sqrt{5} = 2,2361$ $\pi = 3,1416$.