

IX GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale A – 9 maggio 2008

Istruzioni Generali

- ★ Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- ★ Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- ★ Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- ★ **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- ★ **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo.
- ★ **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Il rientro a casa

Quando scoccano le 13, a scuola suona la campanella, alla centrale nucleare cambia il turno e le casalinghe finiscono di fare la spesa. La famiglia Simson al completo torna a casa di gran furia per mettersi tutta sul divano davanti al televisore. Dal più vecchio al più giovane, ci sono papà Numer, mamma Range (si legge alla francese!) e i tre figli Arctholomew (detto Arc), Linea e Martingael (detta Mattie). Il divano ha solo 4 posti, uno a fianco all'altro e abitualmente 4 membri della famiglia prendono posto e il quinto (che non è mai Numer) si siede in braccio a qualcuno di più vecchio di lui. In quanti modi si può disporre la famiglia Simson?

2. La fortuna del signor Bourbaks

Charles Montgomery Bourbaks oggi è multimiliardario: la sua fortuna è il frutto dei faticosi risparmi di tutta una vita, di oculati investimenti e ovviamente di traffici illegali. Bourbaks, che oggi compie 99 anni, ha iniziato con 1 dollaro il giorno del suo 14-esimo compleanno. Da allora, ogni successivo compleanno, la sua fortuna è aumentata di una frazione $1/k$, dove k è la somma delle cifre della somma delle cifre della somma delle cifre (3 volte) dell'anno in questione (si intende *anno domini*), quindi ad esempio dal 1974 al 1975 è aumentata di $1/4$, ovvero del 25%. Quanti *milioni* ha oggi Monty Bourbaks?

3. Ciambelle d'annata

Numer ha molta fame e, perlustrata la cucina, trova 3 scatole di ciambelle: una scaduta nel 2006 con 3 ciambelle residue, una scaduta nel 2007 con 3 ciambelle residue e una scatola nuova da 7 ciambelle. Range, che non vuole trovarsi troppe scatole aperte in giro, gli dice che può mangiare le ciambelle che vuole, a patto che finisca almeno una delle due scatole aperte. Quanti possibili diversi insiemi di ciambelle può mangiare Numer? (Le ciambelle vanno considerate tutte diverse una dall'altra.)

4. Un fiume di birra

Numer è un vero fanatico della birra Diff, ma ha davvero uno strano modo di consumarla. Ogni giorno apre il frigo, conta le lattine e se queste sono in numero multiplo di 3, ne consuma $2/3$. Se invece non sono multiplo di 3, Numer si deprime e per quel giorno ne beve solo una. Range una mattina va a fare la spesa e vuole fare scorta di lattine. Al Math Market ci sono in tutto 2008 lattine. Se vuole che la scorta si esaurisca il più tardi possibile, quante ne deve acquistare *come minimo*? (Chiaramente a parità di durata Range vuole acquistare meno lattine possibile.)

5. Punizione alla lavagna

Arc a scuola ha fatto il discolaccio come al solito e il preside come punizione gli fa scrivere dei numeri alla

lavagna. “Inizia scrivendo 2008 – gli dice – e poi ogni volta scrivi un nuovo numero che sia la somma di tutti i precedenti più il numero di numeri che hai già scritto.” Per controllare che Arc scriva veramente tutto poi gli dice “Quando arrivi al 2008-esimo numero scritto (chiamiamolo n), vieni da me e mi dici la somma di tutti i numeri primi distinti che dividono $n + 1$.” Cosa dovrà rispondergli Arc, per evitare di scrivere tutti quei numeri?

6. Mattie impara a contare

Il pavimento del salotto di casa Simson è formato da mattonelle quadrate di lato 20 centimetri, su ognuna delle quali è scritto un numero da 1 a 3 secondo lo schema a fianco (le righe pari sono traslate di una posizione a destra). Mattie parte dalla prima mattonella in alto a sinistra, legge il numero e gattona spostandosi verso destra o verso il basso di tante caselle quanto è il numero. Quando raggiunge una casella si ferma, legge il numero e si sposta di nuovo verso destra o verso il basso di tante mattonelle quanto è il numero della mattonella su cui si trova. Linea la osserva e si accorge che ci sono alcune caselle su cui la sorellina non si fermerà mai. Sapendo che il pavimento del salotto misura 17 metri in orizzontale e 16 in verticale (rispetto all’orientamento dello schema), calcolare il numero che si ottiene sommando tutte le cifre che compaiono in tutte le mattonelle su cui Mattie non si può fermare.

1	2	3	1	2	3	
3	1	2	3	1	2	
1	2	3	1	2	3	
3	1	2	3	1	2	
1	2	3	1	2	3	
3	1	2	3	1	2	
1	2	3	1	2	3	

7. Una bella somma per una grande addizione

Il signor Bourbaks, l’anziano proprietario della centrale nucleare, ama divertirsi malignamente alle spalle della gente comune, anche sperperando il suo denaro a spregio della povertà altrui. Questa volta ha organizzato un gioco a premi che lo sta rendendo molto popolare: si è presentato con un tabellone quadrettato 23×23 con le caselle numerate ordinatamente da 1 a 529 da sinistra a destra e dall’alto verso il basso. Ha scelto 23 caselle in modo che ce ne fosse una per ogni riga e una per ogni colonna e ha fatto la somma dei valori che vi erano scritti, sfidando poi i suoi dipendenti ad ottenere una somma maggiore della sua, con 23 caselle scelte con lo stesso vincolo: chi stabilirà il record più alto vincerà una bella somma. Qual è il massimo valore che si può ottenere in questo gioco?

8. La strada di casa

Sigmafield è teatro di eventi sciagurati anche per motivi urbanistici e cabalistici. Infatti il municipio, la caserma della polizia, il Math Market, il bar di Boehr e la centrale nucleare stanno (nell’ordine) esattamente ai vertici di un pentagono regolare di lato 2008 metri. Tutte le strade sono perfettamente rettilinee. La scuola elementare è sull’incrocio ad angolo retto tra due strade: quella che passa anche dalla centrale nucleare e dal municipio e una che va alla stazione della polizia. Il parco di divertimenti è esattamente a metà della strada che collega il municipio al Math Market. La casa dei Simson infine è da qualche parte sulla strada che unisce Math Market e centrale nucleare. Arc e Linea, quando tornano dalla scuola elementare, percorrono una strada che porta direttamente a casa loro, passando per il parco. Quanta strada deve fare Numer per tornare a casa dalla centrale nucleare (supponendo che non faccia deviazioni)?

9. L’opera d’arte di Mattie

Mattie ha trovato dei barattoli di vernice rossa, blu e verde che Numer ha distrattamente lasciato in cucina. Presa da un’innata vena creativa, prima di essere scoperta è riuscita a pitturare come illustrato a fianco il corridoio di casa, che è piastrellato con 5×79 mattonelle quadrate. Appena Linea entra in casa resta affascinata dall’opera della sorella (“I bambini sono degli artisti...”) e si domanda in quanti modi si possono fissare due righe e due colonne in modo che le loro 4 intersezioni abbiano tutte lo stesso colore.

R	B	V	R	B
V	R	B	V	R
B	V	R	B	V
R	B	V	R	B
V	R	B	V	R
B	V	R	B	V

10. Il polpettone

Range è una cuoca esperta e smaliziata e il suo polpettone è un capolavoro perfezionato nell’arco di anni. Pochi lo sanno, ma il segreto è la variazione continua della temperatura del forno (possibile solo grazie al

particolare elettrodomestico di casa Simson, capace di temperature razionali positive qualsiasi), che deve seguire la regola seguente. Detta t_n la temperatura al minuto n -esimo, deve essere:

$$t_1 = 3^8, \quad t_2 = 1000, \quad t_{n+1} = \frac{1 + t_n}{t_{n-1}}$$

Quanto deve valere la temperatura del forno al minuto 2008? (Come risultato fornire la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.)

11. Il laghetto nel parco

Il sindaco di Sigmafield vuole far costruire un laghetto all'interno del parco cittadino. Il parco può essere schematizzato come una griglia da 31×31 caselle quadrate; si vuole che il laghetto sia quadrato, con i lati facenti parte di questa griglia. Sapendo che nella casella centrale c'è la statua del mitico fondatore della città, Jacobà Sigmafield, e che il laghetto non dovrà contenerla, in quanti modi diversi potrà essere disposto il laghetto?

12. Trasversalmente attraversando

Numer ha gli incubi da digestione: il polpettone di Range gli è andato *di traverso*. Nel suo sogno angosciato si trova sopra una scacchiera rettangolare di 800×2008 quadrati tutti uguali, e non può fare nient'altro che camminare lentamente lungo tutta la diagonale, partendo da un vertice della scacchiera fino ad arrivare al vertice opposto. Quanti quadrati attraversa nella sua monotona passeggiata? (Si intende che un quadrato è attraversato se la diagonale passa per un suo punto interno: il bordo non conta.)

13. Il più grande FLOP di Range

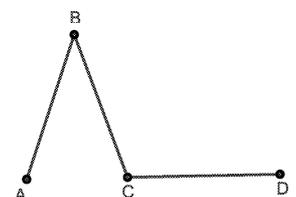
Range ha appena vinto il nuovo super robot da cucina Melm-o-Matic II, l'ultimo ritrovato della tecnica in termini di preparazioni automatiche. Seguendo le istruzioni, lo piazza al centro O del piano da lavoro circolare di raggio 18 pollici in dotazione. Detto AB un diametro, sull'arco AB deve mettere sale e pepe in due punti S e P tali che $AS = 5SB$ e $3AP = PB$ (misurati sugli archi). Il latte va piazzato sul punto L, che è la proiezione di S sul diametro AB. Infine, può mettere la farina in un punto F qualsiasi dell'arco PB (contenente S), ma il robot comunque riuscirà a lavorare solo entro il quadrilatero FLOP, quindi le conviene scegliere F in modo che l'area del quadrilatero sia più grande possibile. Quanti pollici quadrati può valere al massimo quest'area?

14. I due progetti di scienze

Arc prende molto sul serio il progetto di scienze. La sua idea per quest'anno è un lanciagavettoni automatico programmabile. Il bersaglio da colpire è sua sorella Linea, che dovrebbe uscire a momenti di casa con il proprio delicatissimo progetto di scienze (un ecosistema, bah!). Arc per sicurezza si è piazzato al di fuori del cortile di casa, che è un triangolo ABC, e ha installato la sua arma in un punto sul prolungamento del lato BC dalla parte di C, ad una distanza di 30 metri da C. Egli vede spuntare dalle mura di recinzione l'obelisco che Numer ha voluto innalzare esattamente nel circocentro del cortile e stima che sia a 115 metri di distanza dalla sua postazione. Sa inoltre che l'obelisco è a 95 metri dal punto B, dove tra pochi istanti si troverà Linea e nella cui direzione egli ha già puntato lo strumento. Quanti metri di gittata deve impostare sui comandi del lanciagavettoni se vuole colpire esattamente il punto B?

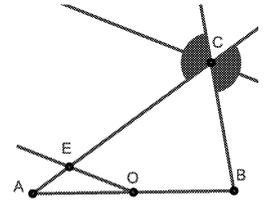
15. Prendete le distanze da quell'aiuola

Andrew Willies, il giardiniere della scuola elementare di Sigmafield, dopo aver abbandonato la teoria dei numeri, si è dato alla geometria agraria ed è ora impegnato con una nuova aiuola. Ha ancora le idee un po' confuse sulla forma, ma è fermamente convinto di alcuni dettagli. Deve essere rigorosamente a forma di triangolo isoscele ABD, con la base AB lunga 108 cm, e in modo tale che sul lato AD possa piazzare nel punto C a distanza esattamente 108 cm da D un cartello ("Calpestare le aiuole vietato è!") che disti 108 cm anche dal vertice B. Quanti centimetri sarà lungo il perimetro dell'aiuola?

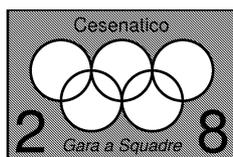


16. Incommensurabile inciviltà

Linea è furiosa perché ha perso tre giorni di lavoro dietro ad un delicatissimo ecosistema di spore, muffe e funghi, distrutto in pochi istanti dall’infallibile mira del fratello Arc. Per sfogare la sua rabbia e mettere insieme un nuovo progetto di scienze è andata al parco, a raccogliere statistiche sull’inciviltà dei suoi concittadini. “Ecco un altro incivile: appena entrato in un parco butta la lattina per terra! Però... ha un’aria familiare quel tipo...” e segna sul suo blocco la distanza tra il cestino e il luogo del misfatto. Il parco ha la forma di un triangolo ABC con i lati AC e BC che misurano 42 e 24 metri rispettivamente. Sapendo che il cestino sta in C , che l’ingresso dove giace la lattina è in un punto E del lato AC e che il sentiero rettilineo che passa per E e per il punto medio di AB è parallelo alla bisettrice esterna del vertice C , che distanza ha segnato Linea nel suo blocco? (Si risponda in *centimetri*.)



“... ma papà... sei tu?!”



IX GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale A – SOLUZIONI – 9 maggio 2008

Nr.	Problema	Soluzione
1	Il rientro a casa	0240
2	La fortuna del signor Bourbaks	2857
3	Ciambelle d'annata	1920
4	Un fiume di birra	1457
5	Punizione alla lavagna	0077
6	Mattie impara a contare	6800
7	Una bella somma per una grande addizione	6095
8	La strada di casa	2628
9	L'opera d'arte di Mattie	2002
10	Il polpettone	7562
11	Il laghetto nel parco	7680
12	Trasversalmente attraversando	2800
13	Il più grande FLOP di Range	0279
14	I due progetti di scienze	0140
15	Prendete le distanze da quell'aiuola	0457
16	Incommensurabile inciviltà	3300