

X GARA NAZIONALE A SQUADRE

Gara del pubblico – 9 maggio 2009

Istruzioni Generali

- ★ Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- ★ Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- ★ Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- ★ **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- ★ **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo.
- ★ **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Questione d'onore

[10]

Gli elfi sono creature nobili e rifuggono la falsità e l'inganno: essi dicono sempre il vero. Gli umani, invece, sono un popolo meno austero e non hanno alcun rimorso nel caso in cui abbiano la necessità di mentire: possono dire il vero o il falso. Quando gli orchi conquistano una roccaforte umana, catturano 9999 prigionieri. Essi vengono interrogati in ordine; i primi 1729 affermano di essere elfi. A partire dal 1730°, l' n -esimo afferma "Ci sono almeno $n - 1729$ umani tra noi". Quanti possono essere, al massimo, gli elfi?

2. Rettangolo pitagorico

[15]

El-Romb con mezzelfica pazienza sta compilando una tavola pitagorica 10000×10000 . Bobo passa di là e traccia il bordo di un rettangolo da 5×53 caselle che ha 1001 su due angoli opposti e si domanda quanto valga la media aritmetica di tutti i numeri nel rettangolo. Sapete rispondere?

3. Antiche battaglie

[20]

Una grande battaglia delle epoche antiche si è svolta nell'anno N della prima era. Sapendo che N è il più piccolo numero che, in base dieci, si scrive con le sole cifre 2 e 3 ed è divisibile per 2^{2009} , trovare le ultime 4 cifre di N .

4. Compleanni gobbitt

[20]

I *gobbitt* hanno un ciclo vitale differente da quello degli umani, infatti raggiungono la maturità più tardi e restano giovani molto più a lungo. Oggi è il compleanno di Polino, ma Morry non ricorda più l'età del suo giovane amico. Polino allora pone questo indovinello: "La mia età è pari al numero di interi tra 1 e 55 che non si possono scrivere come $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm 4^2 \pm 5^2$ per nessuna scelta dei segni". Quanti anni ha Polino?

5. Incisioni nella roccia

[25]

Nel raccontare un suo viaggio nelle miniere di Toria, un viandante accennò a una parete rocciosa su cui era scritto qualcosa di particolare: si trattava di un polinomio, in cui il termine di grado più alto era x^4 e il termine noto 45. Non ricordava altro di quella incisione, però sapeva che tutte le sue radici erano intere. Quanti diversi coefficienti poteva avere il termine di terzo grado?

6. Luci e ombre**[25]**

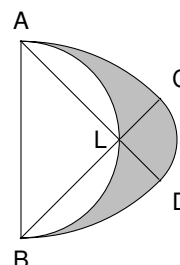
Il Poliedril di Sarumath è un cristallo perfettamente trasparente a forma di cubo di 1 piede di lato. Il malvagio Tauron ha sabotato anche questa pietra veggente, inserendo al suo interno un quadrato nero e opaco avente i vertici nei centri delle facce verticali del cubo. Per permettere ad Areagorn di usare nuovamente la pietra, Gaussdalf deve evocare una magica fonte di luce sulla verticale del centro del quadrato nero, in posizione tale che il rapporto tra la superficie del cubo illuminata e quella in ombra sia pari a $2010/2009$ (la fonte di luce può essere posizionata anche all'interno del cubo). A che distanza dal quadrato, in piedi, dovrà essere evocata la luce? (Come risultato fornire la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.)

7. Riunione a Riemandell**[30]**

El-Romb ha organizzato a Riemandell un incontro tra i rappresentanti delle varie razze. Giungono 4 elfi, 3 nani e 3 uomini, che siederanno attorno ad una tavola rotonda con 10 posti. Tuttavia, elfi e nani non accettano di sedersi gli uni vicini agli altri: in quanti modi può El-Romb disporre a tavola i 10 invitati? (Note: due disposizioni si considerano uguali se si ottengono l'una dall'altra per rotazione, ma diverse se si ottengono per simmetria. Tutti gli invitati vanno considerati diversi e distinguibili.)

8. La luna di Puntor**[30]**

Le leggende narrano che la notte della battaglia di Puntor fosse illuminata da una luna avente la forma dell'area racchiusa tra gli archi di circonferenza AB , BD , DC e CA , dove: AB è una semicirconferenza di punto medio L ; C e D sono tali che BC e AD sono lunghi quanto AB e passano per L ; gli archi BD , DC e CA hanno centro in A , L e B rispettivamente. (Vedi figura.) Se AB misurava 42 Km, a quanto ammontava l'area racchiusa dalla luna, in km quadri?

**9. Le miniere di Toria****[35]**

Le miniere di Toria, meravigliose dimore sotterranee costruite dai nani, possono essere viste come un reticolo tridimensionale lungo 5 miglia in direzione Ovest-Est, largo 3 miglia in direzione Nord-Sud che si sviluppa su 5 livelli (5 piani, quindi 4 rampe di scale). Ogni miglio c'è una stanza che è collegata alle stanze accanto da corridoi verso E, O, N e S nonché alle stanze superiore ed inferiore mediante delle scale. Gaussdalf e la compagnia dell'Anello sono appena entrati dalla porta dell'Agrifogliere, al livello più alto nell'angolo NO e devono arrivare al cancello verso l'Anduin, al livello più basso nell'angolo SE. Vogliono fare in fretta, quindi vogliono attraversare il minimo numero possibile di stanze. Sanno inoltre che il livello più basso è incendiato, quindi vogliono scendervi solamente dopo essersi spinti il più a SE possibile. Quanti percorsi diversi possono seguire?

10. Una prova di logica**[35]**

Sarumath è assediato nella sua torre di Isengraf! Egli vuole cercare di trattenere il più a lungo possibile gli assediati con vuote parole: ha a disposizione 12 argomenti di cui parlare e vuole scoprire quante frasi può, al più, pronunciare per distrarre i nemici rispettando le seguenti regole:

- ★ ogni frase deve essere una affermazione sulla verità o falsità di alcuni degli argomenti a sua disposizione;
- ★ non può cadere in contraddizione, altrimenti l'astuto Gaussdalf se ne accorgerà e si risveglierà dall'incantesimo;
- ★ non può fare affermazioni riguardanti tutti gli argomenti, altrimenti il nano Gim-Lie perderà il filo del discorso e l'incantesimo sarà rotto;
- ★ ogni affermazione dovrà essere diversa dalle precedenti, altrimenti Morry comincerà ad annoiarsi e si desterà.

Quante affermazioni può fare, al più, Sarumath?

11. Il numero leggendario

[40]

C'è una iscrizione alle porte di Puntor che riporta il “numero leggendario” cioè il numero più grande che si conoscesse ai tempi della creazione di Puntor. Si sa che quel numero è $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2009$. Tuttavia il vento nel tempo ha eroso la pietra e ciò che ne è rimasto sono solo le ultime 4 cifre. Quali sono?

12. Torrette d'assedio

[40]

Gli orchi stanno costruendo le torrette per assediare la fortezza di Minas Torith. Per realizzarle si servono di alcuni mattoni a forma di parallelepipedi retti. Non conoscono le misure dei lati, però sanno che se si somma la lunghezza con 7 volte la larghezza e 49 volte l'altezza si ottiene la misura di 273 cm. Quant'è al massimo il volume di ciascun mattone in centimetri cubi?

13. Mantenere i contatti

[45]

Prima di ritrovarsi al consiglio indetto da El-Romb a Riemandell, i 25 rappresentanti dei popoli liberi dovranno contattarsi, e ognuno di essi vuole assicurarsi di aver sentito tutti gli altri. Purtroppo però i partecipanti al consiglio vengono da 13 città diverse, per cui ognuno manderà una lettera a tutti quelli che non sono nella propria città. Quante lettere sono state mandate, come minimo?

14. Nove agli uomini mortali

[50]

Il malvagio Tauron, accecato dalla brama di potere, conta i modi in cui può indossare i 9 anelli dei nazgul sulle 8 dita superstiti delle sue mani. Per ognuno di questi modi, prende nota di quanti e quali anelli vanno su quale dito e in che ordine. Quanti modi diversi conterà? (Se la quantità richiesta è un intero maggiore di 9999, come risultato fornire le ultime 4 cifre.)

15. Gli scalini di Banach Dûr

[55]

La torre di Tauron ha $39!$ scalini. Il più infimo dei servi orchetti, che si trova sullo scalino più in alto, sta prendendo ordini direttamente dall'Oscuro Sire, e li deve trasmettere in basso a vari luogotenenti lungo tutta la torre. Inizia scendendo la metà esatta dei gradini, dove trova un primo luogotenente; da qui in poi, ogni volta che parla con un luogotenente sullo scalino k -esimo, questi gli ordina di scendere di d altri scalini, dove d è il più grande divisore di k distinto da k stesso.

Arrivato finalmente al primo scalino, scambia due parole con l'ennesimo luogotenente e poi stramazza a terra stremato.

Con quanti luogotenenti avrà parlato l'orchetto prima di stramazzare al suolo?

16. Rinforzi radicali

[60]

Areagorn deve cercare di aumentare l'esercito della compagna e chiede rinforzi ai non morti. Sadicamente il capo dell'esercito dei non morti, appassionato di matematica, propone ad Areagorn di dargli un guerriero per ogni numero naturale n tale che il numero

$$\sqrt[49]{\sqrt{n} + \sqrt{n + 2009^{2009}}}$$

sia intero. Di quanti non morti disporrà la compagna?

17. Il Poliedril di Tauron

[65]

Il Poliedril dell'Oscuro Sire è un tetraedro le cui lunghezze degli spigoli ammontano a 46, 47, 50, 55, 56 e 64 centimetri. All'interno del Poliedril, un segmento etereo è un segmento che congiunge un vertice con il baricentro della faccia opposta. Quanto vale la somma dei quadrati delle lunghezze dei quattro segmenti eterei, in centimetri quadri?

18. Strane geometrie

[70]

La piazza principale di Riemandell ha due fontane circolari: una grande di centro A e una piccola

di centro B . Morry e Polino si trovano rispettivamente nei punti M e P e notano che i punti in cui si trovano hanno una particolarità: se si calcola la differenza tra i quadrati delle lunghezze delle tangenti condotte ai due cerchi, si trova lo stesso numero per entrambi i *gobbit*. Inoltre notano che gli angoli \widehat{MAB} , \widehat{MBA} misurano rispettivamente 60 e 30 gradi e la tangente di \widehat{PAB} è $12/5$. Quanto vale la tangente dell'angolo \widehat{PBA} ? (Come risultato fornire la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.)

19. Il libro dà i numeri**[75]**

Per decorare il libro che racconta le sue avventure, Bobo ha deciso di scrivere sulla prima riga dell'ultima pagina i numeri $1, 2^2, 3^2, \dots, 2009^2$. Passato alla riga sottostante, sotto ogni coppia di numeri della riga superiore scrive la loro somma, poi passa alla riga successiva procedendo allo stesso modo e continua così fino ad ottenere un solo numero. Qual è l'ultimo numero? (Se la quantità richiesta è un intero $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$, con p_1, \dots, p_k primi distinti, fornire come risultato il numero $p_1 a_1 + \dots + p_k a_k$.)

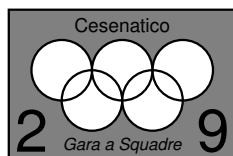
20. L'anello di Gaussdalf**[80]**

Dopo la distruzione dell'Unico Anello, anche gli altri anelli magici persero i loro poteri. Solo in seguito Gaussdalf rivelò di possederne uno e lo mostrò a Frobbo. Immaginate un triangolo equilatero di lato 40 mm; l'anello è il solido formato da tutti i punti che distano al più 1.8 mm dal perimetro del triangolo. Quanti millimetri cubi misura il volume dell'anello?

Con la collaborazione di



Crescere a libri aperti



X GARA NAZIONALE A SQUADRE

Gara del pubblico – SOLUZIONI – 9 maggio 2009

Nr.	Problema	Pti	Soluzione
1	Questione d'onore	10	5864
2	Rettangolo pitagorico	15	1053
3	Antiche battaglie	20	3232
4	Compleanni <i>gobbit</i>	20	0041
5	Incisioni nella roccia	25	0013
6	Luci e ombre	25	8041
7	Riunione a Riemandell	30	6048
8	La luna di Puntor	30	0370
9	Le miniere di Toria	35	9240
10	Una prova di logica	35	4094
11	Il numero leggendario	40	0625
12	Torrette d'assedio	40	2197
13	Mantenere i contatti	45	0444
14	Nove agli uomini mortali	50	7200
15	Gli scalini di Banach Dûr	55	0195
16	Rinforzi radicali	60	1743
17	Il Poliedril di Tauron	65	7592
18	Strane geometrie	70	0009
19	Il libro dà i numeri	75	4574
20	L'anello di Gaussdalf	80	1205