

# X GARA NAZIONALE A SQUADRE

Finale nazionale – 9 maggio 2009

## Istruzioni Generali

- ★ Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- ★ Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- ★ Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

## Scadenze importanti

- ★ **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- ★ **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo.
- ★ **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

### 1. Corsa verso il Monte Fatou

L'occhio di Tauron  $O$ , in cima alla torre di Banach Dûr, è alla stessa altezza della Voragine del Fatou  $V$ , la bocca del vulcano in cui Frobbio sta per gettare l'anello. Non appena l'Oscuro Sire si accorge di quello che sta per succedere, fa partire la sua guardia personale di orchetti dalla base  $B$  della torre. Essi corrono per 1311 metri in piano fino al punto  $P$  e per altrettanto in salita lungo il vulcano, con pendenza 45 gradi (senza cambiare direzione orizzontale). Quanti ettari misura la superficie del quadrilatero  $OV PB$ ? (Un ettaro è la superficie di un quadrato di lato 100 metri.)

### 2. Dividiamoci!

La compagnia dell'anello, formata da 4 *gobbit*, 2 umani, un nano, un elfo e uno stregone si deve dividere in due gruppi da 4 e da 5. Si vuole che elfo e nano stiano assieme e i *gobbit* siano divisi 2 per gruppo. In quanti modi si possono dividere?

### 3. Sincerità elfica

Gli elfi sono creature nobili e rifuggono la falsità e l'inganno: essi dicono sempre il vero. Gli umani, invece, sono un popolo meno austero e non hanno alcun rimorso nel caso in cui abbiano la necessità di mentire: possono dire il vero o il falso. Quando gli orchi conquistano una roccaforte umana, catturano 9999 prigionieri. Essi vengono interrogati in ordine; i primi 2009 affermano di essere elfi. A partire dal 2010°, l' $n$ -esimo afferma "Ci sono almeno  $n - 2009$  umani tra noi". Quanti possono essere, al massimo, gli elfi?

### 4. Moltiplicazioni elfiche

El-Romb con mezzelfica pazienza sta compilando una tavola pitagorica  $10000 \times 10000$ . Bobo passa di là e traccia il bordo di un rettangolo da  $35 \times 239$  caselle che ha 2009 su due angoli opposti e si domanda quanto valga la media aritmetica di tutti i numeri nel rettangolo. Sapete rispondere?

### 5. Orchi e quadrati

Un battaglione di orchi è disposto in formazione quadrata. Legalois li conta per sapere quante frecce usare per abatterli e si accorge che il loro numero è il più grande quadrato perfetto scrivibile in base decimale, utilizzando due sole cifre distinte, nella forma  $aabb$ . Da quanti orchi è formato il battaglione?

**6. Epoche remote**

Una grande battaglia delle epoche antiche si è svolta nell'anno  $N$  della prima era. Sapendo che  $N$  è il più piccolo numero che, in base dieci, si scrive con le sole cifre 2 e 9 ed è divisibile per  $2^{2009}$ , trovare le ultime 4 cifre di  $N$ .

**7. Vuoto di memoria**

Nel raccontare un suo viaggio nelle miniere di Toria, un viandante accennò a una parete rocciosa su cui era scritto qualcosa di particolare: si trattava di un polinomio, in cui il termine di grado più alto era  $x^4$  e il termine noto 12. Non ricordava altro di quella incisione, però sapeva che tutte le sue radici erano intere. Quanti diversi coefficienti poteva avere il termine di terzo grado?

**8. Il Poliedril di Sarumath**

Il Poliedril di Sarumath è un cristallo perfettamente trasparente a forma di cubo di 1 piede di lato. Il malvagio Tauron ha sabotato anche questa pietra veggente, inserendo al suo interno un quadrato nero e opaco avente i vertici nei centri delle facce verticali del cubo. Per permettere ad Areagorn di usare nuovamente la pietra, Gaussdalf deve evocare una magica fonte di luce sulla verticale del centro del quadrato nero, in posizione tale che il rapporto tra la superficie del cubo illuminata e quella in ombra sia pari a  $2009/2008$  (la fonte di luce può essere posizionata anche all'interno del cubo). A che distanza dal quadrato, in piedi, dovrà essere evocata la luce? (Come risultato fornire la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.)

**9. La chiave incantata**

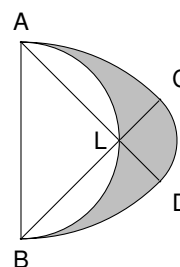
Gaussdalf deve aprire una porta di Toria, dietro la quale si celano le pergamene con gli ultimi segreti dei nani. La magia che blocca la porta è sofisticata: per entrare occorre un prisma regolare a base esagonale, con incisa una diversa runa su ciascuna delle facce. Gaussdalf conosce le 8 rune che deve usare, ma non sa la corrispondenza con le facce. Quanti tentativi dovrà fare al massimo per aprire la porta? (Nota: due configurazioni sono diverse solo se non è possibile ottenere l'una dall'altra ruotando il prisma rispetto a qualche asse.)

**10. Gli anelli degli Elfi**

In fuga dall'Eregion, dopo la scoperta del tradimento da parte di Tauron, Celebrimbor prese tre anelli a caso tra i 19 presenti (3 per gli elfi, 7 per i nani, 9 per gli uomini mortali). La sorte lo aiutò, facendogli recuperare proprio i tre anelli degli elfi. Qual era la probabilità che presi 3 anelli solo 2 di questi appartenessero agli elfi? (Come risultato fornire la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.)

**11. La luna della battaglia**

Le leggende narrano che la notte della battaglia di Puntor fosse illuminata da una luna avente la forma dell'area racchiusa tra gli archi di circonferenza  $AB$ ,  $BD$ ,  $DC$  e  $CA$ , dove:  $AB$  è una semicirconferenza di punto medio  $L$ ;  $C$  e  $D$  sono tali che  $BC$  e  $AD$  sono lunghi quanto  $AB$  e passano per  $L$ ; gli archi  $BD$ ,  $DC$  e  $CA$  hanno centro in  $A$ ,  $L$  e  $B$  rispettivamente. (Vedi figura.) Se  $AB$  misurava 46 Km, a quanto ammontava l'area racchiusa dalla luna, in km quadri?

**12. L'inseguimento**

Gli orchi hanno rapito Morry e Polino ieri pomeriggio alle 15 e sono partiti a tutta velocità verso Isengraf, distante 234 miglia. Areagorn, Legalois e Gim-Lie hanno scoperto le tracce del rapimento solo questa mattina alle 9 e si sono immediatamente lanciati all'inseguimento, partendo dallo stesso punto. Gli orchi hanno una marcia molto irregolare, che dipende dal sole e dalla loro stanchezza. Alle 15 partono a piena velocità, a 3 miglia l'ora e riescono a tenere questo ritmo per 6 ore; poi rallentano a 1.8 mi/h per le successive 6 ore; poi ancora scendono a 1.2 mi/h per le 6 ore

seguenti e infine si fermano stremati a riposare per altre 6 ore, ricominciando daccapo alla fine del ciclo. I nostri eroi invece procedono di corsa al ritmo regolare di 2 mi/h per 24 ore intere, alla fine delle quali rallentano marciando a 1.5 mi/h per le 24 ore successive per riposarsi un po', per poi essere pronti di nuovo a partire di corsa, e così via. Sapendo che in un miglio ci sono 80 catene, a quante catene da Isengraf i nostri raggiungono finalmente gli orchi? (Rispondere 0000 se non fanno in tempo.)

### 13. Le vette di Puntor

Il profilo delle vette di Puntor è costituito da due triangoli isosceli  $ABV_1$  e  $BCV_2$  di basi  $AB$ ,  $BC$ , con  $B$  punto medio di  $AC$ . Sappiamo che  $AC$  è lungo 4572 metri e che  $V_1$  e  $V_2$  distano rispettivamente 8001 e 3429 metri da  $AC$ . A quanto ammonta, in secondi d'arco, il valore assoluto della differenza  $\widehat{V_2AV_1} - \widehat{BV_2C}$ ? (Si ricorda che un secondo d'arco è un angolo pari a  $1/3600$  di grado.)

### 14. Rinforzi ponderati

Areagorn deve cercare di aumentare l'esercito della compagnia, e chiede rinforzi a Divisor, reggente di Minas Torith, famoso per la sua parsimonia. Areagorn dice a Divisor: "Mi servono almeno 1000 dei tuoi uomini. Il loro numero deve essere un quadrato perfetto perché li vorrei disporre a quadrato, ma vorrei poterli disporre anche a triangolo (in prima fila un solo guerriero, nella seconda fila 2, nella terza 3... nell' $n$ -esima esattamente  $n$ )." Divisor ci pensa un po' e poi risponde: "Si va bene, non dovrebbero essere troppi, te ne darò il minimo indispensabile!" Quanti guerrieri manderà Divisor?

### 15. I numeri del libro

Per decorare il libro che racconta le sue avventure, Bobo ha deciso di scrivere sulla prima riga dell'ultima pagina i numeri  $2009^0, 2009^1, 2009^2, \dots, 2009^{2009}$ . Passato alla riga sottostante, sotto ogni coppia di numeri della riga superiore scrive la loro somma, poi passa alla riga successiva procedendo allo stesso modo e continua così fino ad ottenere un solo numero. Qual è l'ultimo numero? (Se la quantità richiesta è un intero maggiore di 9999, come risultato fornire le ultime 4 cifre.)

### 16. Il mosaico

Nella casa di El-Romb c'è una sala molto grande dove si intende realizzare un mosaico gigantesco, un rettangolo formato da  $10!$  tessere quadrate identiche. Si vorrebbe che i lati del mosaico fossero in rapporto più vicino possibile a  $11/17$ . Quante tessere deve misurare il lato lungo?

### 17. Gaussdalf sperduto a Toria

Provato dal combattimento con il balrog, Gaussdalf vaga confuso nelle miniere di Toria. Ogni giorno, per 7 giorni consecutivi, egli si muove di una galleria in direzione nord, sud, est o ovest (e per tutta la giornata cammina nella stessa direzione). Tutte le gallerie hanno la stessa lunghezza, e cioè 1 lega. Alla fine del settimo giorno, utilizza un incantesimo che gli permette di scoprire quanta distanza ha percorso in linea d'aria dal punto da cui è partito il primo giorno considerato. Sapendo che Gaussdalf dista 5 leghe da dove è partito, quante strade diverse può aver percorso?

### 18. Preparando l'assedio

Gli orchi stanno costruendo le torrette per assediare la fortezza di Minas Torith. Per realizzarle si servono di alcuni mattoni a forma di parallelepipedi retti. Non conoscono le misure dei lati, però sanno che se si somma la lunghezza con 3 volte la larghezza e 9 volte l'altezza si ottiene la misura di 171 cm. Quant'è al massimo il volume di ciascun mattone in centimetri cubi?

### 19. Sette ai principi dei nani

Il malvagio Tauron, accecato dalla brama di potere, conta i modi in cui può indossare i 7 anelli dei nani sulle 8 dita superstite delle sue mani. Per ognuno di questi modi, prende nota di quanti e quali

anelli vanno su quale dito e in che ordine. Quanti modi diversi conterà? (Se la quantità richiesta è un intero maggiore di 9999, come risultato fornire le ultime 4 cifre.)

## 20. La piramide di Banach-Alaoglu

La piramide di Banach-Alaoglu, leggendario sovrano degli orchi, è una piramide retta a base quadrata di lato 36 metri. Sapendo che due facce adiacenti della superficie laterale formano un angolo di 120 gradi, qual è il volume della piramide, in metri cubi?

## 21. Cubbit

I *gobbit* amano fare piccoli lavoretti con la carta. Sam si è procurato un foglio *rettangolare* dall'area di 1 metro quadrato e vuole farne un cubo. Per la precisione, vuole ritagliare dal foglio un pezzo *unico* formato da 6 quadrati uguali, uniti tra di loro per uno o più lati, che rappresenti uno sviluppo piano del cubo, ovvero che piegato opportunamente tra un quadrato e l'altro, formi la superficie di un cubo (ogni quadrato deve diventare una faccia del cubo). Sam sa il fatto suo, quindi ha fatto in modo che le proporzioni tra i due lati del rettangolo siano tali da poter ottenere, a parità di superficie, il cubo più grande possibile. Quanti centimetri quadrati di carta restano comunque inutilizzati, come minimo?

## 22. L'oscura torre

La torre di Tauron ha  $29!$  scalini. Il più infimo dei servi orchetti, che si trova sullo scalino più in alto, sta prendendo ordini direttamente dall'Oscuro Sire, e li deve trasmettere in basso a vari luogotenenti lungo tutta la torre. Inizia scendendo la metà esatta dei gradini, dove trova un primo luogotenente; da qui in poi, ogni volta che parla con un luogotenente sullo scalino  $k$ -esimo, questi gli ordina di scendere di  $d$  altri scalini, dove  $d$  è il più grande divisore di  $k$  distinto da  $k$  stesso.

Arrivato finalmente al primo scalino, scambia due parole con l'ennesimo luogotenente e poi stramazza a terra stremato.

Con quanti luogotenenti avrà parlato l'orchetto prima di stramazza al suolo?

## 23. Il vessillo triangolare polinomiale

Il vessillo triangolare polinomiale  $V_1$ , realizzato da Gaussdalf a protezione del regno degli umani, raffigura un triangolo  $T_1$  avente lati di lunghezza 440, 444, 448, il polinomio monico di terzo grado  $P_1(x)$ , che ha come radici proprio le lunghezze dei lati di  $T_1$ , e il magico numero  $q_1$ , pari al quadrato dell'area di  $T_1$ . Il vessillo nemico  $V_2$ , realizzato dal malvagio Tauron, ha le medesime caratteristiche, ma al posto di  $P_1(x)$  figura il polinomio  $P_2(x) = P_1(x) + 1$  associato al tetro triangolo  $T_2$ . Quanto vale  $q_2 - q_1$ ?

## 24. Rinforzi fantasmagorici

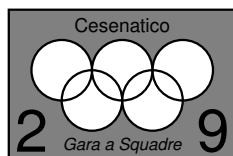
Areagorn deve cercare di aumentare ancora l'esercito della compagnia, e stavolta chiede rinforzi ai non morti. Sadicamente il capo dell'esercito dei non morti, appassionato di matematica, propone ad Areagorn di dargli un guerriero per ogni numero naturale  $n$  tale che il numero

$$\sqrt[41]{\sqrt{n} + \sqrt{n + 2009^{2009}}}$$

sia intero. Di quanti non morti disporrà la compagnia?

Con la collaborazione di





# X GARA NAZIONALE A SQUADRE

Finale nazionale – SOLUZIONI – 9 maggio 2009

Nr.	Problema	Soluzione
1	Corsa verso il Monte Fatou	<b>0164</b>
2	Dividiamoci!	<b>0024</b>
3	Sincerità elfica	<b>6004</b>
4	Moltiplicazioni elfiche	<b>4032</b>
5	Orchi e quadrati	<b>7744</b>
6	Epoche remote	<b>2992</b>
7	Vuoto di memoria	<b>0021</b>
8	Il Poliedril di Sarumath	<b>2679</b>
9	La chiave incantata	<b>3360</b>
10	Gli anelli degli Elfi	<b>0339</b>
11	La luna della battaglia	<b>0444</b>
12	L'inseguimento	<b>4320</b>
13	Le vette di Puntor	<b>0000</b>
14	Rinforzi ponderati	<b>1225</b>
15	I numeri del libro	<b>0000</b>
16	Il mosaico	<b>2400</b>
17	Gaussdalf sperduto a Toria	<b>0476</b>
18	Preparando l'assedio	<b>6859</b>
19	Sette ai principi dei nani	<b>7280</b>
20	La piramide di Banach-Alaoglu	<b>7776</b>
21	Cubbit	<b>4000</b>
22	L'oscura torre	<b>0130</b>
23	Il vessillo triangolare polinomiale	<b>0666</b>
24	Rinforzi fantasmagorici	<b>2475</b>