

## Istruzioni Generali

- ★ Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- ★ Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- ★ Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

## Scadenze importanti

- ★ **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- ★ **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo.
- ★ **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

### 1. Un vertice centrale

Il vertice dei capi dei popoli liberi della Terra di Un Mezzo avviene a casa di El-Romb mezzelfo, a Riemandell. Il giardino della casa è un ampio quadrato  $ABCD$  di lato 100 metri. Due raffinate fontane sorgono su  $M$  e  $N$  i punti medi di  $AB$  e  $CD$ . El-Romb parla dal punto  $V$ , esattamente al centro di  $MBCN$ , ad un uditorio che sta tutto all'interno del cortile formato dal triangolo  $AVN$ . Quanto misura in metri quadrati la superficie del cortile?

### 2. Anni di esperienza

Gli *enti* o pastori dei boschi, sono alberi intelligenti millenari. Polimino Tuc, detto Polino è invece un esemplare di *gobbit*, creature che somigliano ad umani piccoli e rotondetti, vivaci e amanti della bella vita. Parlando con un *ente*, Polino scopre la leggendaria longevità di queste straordinarie creature. Quando Polino gli domanda quanti anni abbia, l'*ente* risponde serafico e scandendo bene le parole:

$$\frac{(2009^2 - 2007^2)(2009^2 - 2006^2)(2009^2 - 2005^2) \dots (2009^2 - 0^2)}{(2008^2 - 2007^2)(2008^2 - 2006^2)(2008^2 - 2005^2) \dots (2008^2 - 0^2)}$$

Quanti anni ha questo particolare *ente*?

### 3. Un risveglio dolce-amaro

Il giovane Meriandin Escherbach, detto Morry, alterna regolarmente 10 ore di veglia e 15 di sonno. Il pasticcere del villaggio sforna le sue sfogliatelle celebri in tutta la Contea ogni domenica a mezzogiorno. Sempre a mezzogiorno, ogni 30 giorni esatti, il padrone di casa di Morry viene a reclamare l'affitto. Quest'oggi, Meriandin si è svegliato esattamente mentre il pasticcere sfornava le sfogliatelle e il padrone di casa bussava alla sua porta. Tra quanti giorni questo succederà di nuovo?

### 4. Una scorciatoia nascosta

Nelle miniere di Toria la compagnia di eroi guidata dallo stregone Gaussdalf il Grigio si imbatte in una porta segreta. Aprendola potrebbero accedere ad una scorciatoia importante, ma per farlo occorre conoscere il prodotto  $(\alpha - 1)(\beta - 1)$ , dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono le radici del polinomio  $37x^2 + 9002x - 2009$ . Dite il prodotto... ed entrate.

### 5. Diario segreto

La principessa Euleryn ha un diario segreto protetto da un lucchetto con 4 cifre. Hermilinguo vuole aprirlo e sa che esattamente 2 cifre sono uguali, ma non sa in che posizione si trovino né quali siano. Quanti tentativi dovrà fare al massimo?

### 6. L'esercito di re Theorem

Le caserme di re Theorem sono piene di soldati che vengono spostati di anno in anno da una sede all'altra a seconda delle necessità. La particolarità è che dall'anno scorso a quest'anno la media tra la variazione di soldati della caserma  $n - 1$  e della caserma  $n$  è stata  $n$  per ogni  $n \geq 2$ . Sapendo che la caserma 2009 ha avuto 1000 soldati in più, quanti soldati in più ha avuto la caserma 1000?

### 7. Giochi di gobbit

Morry scommette con Polino che quest'ultimo non riuscirà a trovare le ultime 4 cifre del numeratore del più piccolo numero razionale della forma  $a/b$  (ridotta ai minimi termini) con  $ab = 43!$  e tale che  $b$  non sia multiplo di 143. Quale numero dovrà indovinare Polino per vincere la scommessa?

**8. Il sabotaggio del Poliedril**

I Poliedril o pietre veggenti, sono magici cristalli che permettono di vedere cose remote nel tempo e nello spazio. Tauron detto l'Oscuro Sire della Terra di Un Mezzo, o semplicemente il Nemico, ha sabotato il Poliedril di re Divisor, che ora mostra solo immagini spaventose e reality show. Il Poliedril ha la forma di un dodecaedro ma Tauron ha "cancellato" magicamente alcuni spigoli del solido. Adesso è possibile percorrere l'intero "scheletro" formato dai restanti spigoli passando una ed una sola volta per ognuno di essi. Quanti spigoli ha cancellato come minimo?

**9. Potenze a confronto**

Nel mezzo dello scontro tra le forze dell'Oscuro Sire e i popoli liberi della Terra di Un Mezzo, Gaussdalf si accorge che, dette  $a$  le unità dell'esercito di Tauron e  $b$  le unità che costituiscono quello dei popoli liberi, vale la relazione  $5a^3 = 6b^4$ . Qual è il numero totale minimo di soldati presenti sul campo di battaglia considerando entrambi gli eserciti e supponendo che effettivamente almeno qualcuno ci fosse?

**10. Gödellum scassinatore**

Il destino dei popoli liberi della Terra di Un Mezzo è sulle spalle di un giovane *gobbit*. Frobbino Massim-Mattlinks, detto Frobbio, è il portatore dell'anello del potere. Per proteggerlo, Frobbio lo ha messo in uno scrigno chiuso con una combinazione. Mentre Frobbio e il suo amico Sam dormono, il malvagio Gödellum tenta di impossessarsene. Sapendo che la combinazione è composta da 6 cifre, ognuna tra 1 e 5, e che nessuna cifra compare una sola volta, quanti tentativi dovrà effettuare al massimo per riottenere il suo... tessoro?

**11. Un anello sfolgorante**

Tra le numerose caratteristiche dell'anello vi è una singolare e inquietante luminosità che si manifesta per un fenomeno molto strano. Tre sfere di energia percorrono l'intera circonferenza dell'anello nello stesso verso con velocità costanti, rispettivamente di 2009, 1253 e 756 giri al minuto. Quando almeno 2 di esse si trovano sovrapposte, un leggero bagliore si sprigiona dall'anello. Quanti bagliori si verificano ogni minuto, se in un dato istante le tre sfere sono perfettamente sovrapposte?

**12. Custodire l'anello**

I nazgul si avvicinano, e Frobbio nasconde l'anello in un contenitore quadrangolare  $ABCD$  di area  $3388 \text{ mm}^2$ , in cui  $AD$  è perpendicolare ad  $AB$  e a  $CD$  e tale che  $4AB = 7CD$ . L'anello calza perfettamente nel contenitore, toccandone tutti e quattro i lati. Quanti millimetri misura il raggio dell'anello?

**13. L'anello si rivela**

Frobbio ha ereditato anni fa l'anello del potere dal suo parente Bobo Mattlinks. Frobbio si è chiesto molte volte come Gaussdalf abbia scoperto che quello di Bobo era davvero l'anello del potere. Ebbene, un'antica pergamena dice che l'anello si sarebbe illuminato se qualcuno avesse pronunciato le soluzioni intere  $(x, y)$  dell'equazione

$$\frac{2x^2 + 5y^2}{xy - 8} = 11$$

Gaussdalf racconta con emozione del giorno in cui, dopo aver a lungo riflettuto, prese in mano l'anello e iniziò recitare le soluzioni. Quanto vale la somma dei valori assoluti di tutti i numeri che disse in quell'occasione?

**14. Le mura di Isengraf**

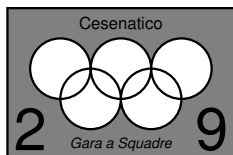
La torre dello stregone Sarumath il Bianco, signore di Isengraf e traditore dei popoli liberi, sorge in mezzo ad una piana ed è circondata da due perimetri di mura che si intersecano tra loro: le mura più antiche disegnano nella piana un quadrilatero convesso  $ABCD$ , mentre quelle più recenti sono di forma circolare e si intersecano 8 volte con le prime, restando suddivise dai punti di intersezione in 8 archi. Di questi ultimi, i 4 interni alle mura antiche sono tali che le somme delle lunghezze di due non consecutivi sono uguali tra loro. L'angolo  $\widehat{DAB}$  del quadrilatero vale  $72^\circ$ ; inoltre,  $\widehat{BCD} - \widehat{CDA} = 30^\circ$ . Determinare l'angolo  $\widehat{ABC}$ .

**15. Tentativo di fuga**

Dopo una feroce battaglia con il nano Gim-Lie, un orco si dà alla fuga. Quando è ormai quasi al sicuro nella foresta, Legalois lo nota e scaglia in rapida successione 5 frecce, ma dato che il bersaglio si allontana, la sua precisione è sempre minore: ha  $1/4$  di probabilità di colpirlo con la prima freccia,  $1/5$  con la seconda, e così via, fino a  $1/8$  con la quinta. Sapendo che il nemico riesce a fuggire se colpito 1 volta, ma non se viene colpito 2 volte, qual è la probabilità che riesca a scappare? (Come risultato fornire la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.)

**16. La distanza dello scontro**

L'epica battaglia di Puntor, tra Gaussdalf e Tauron, ebbe luogo in una foresta quadrata, dal perimetro di 60 Km. Le scritture riportano, per entrambi i contendenti, la somma dei quadrati delle distanze dai vertici del campo di battaglia: Gaussdalf  $594 \text{ Km}^2$ , Tauron  $499 \text{ Km}^2$ . Da quanti metri di distanza dovettero affrontarsi, al massimo, lo stregone e l'oscuro signore?



# X GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale A – SOLUZIONI – 8 maggio 2009



Nr.	Problema	Soluzione
1	Un vertice centrale	<b>2500</b>
2	Anni di esperienza	<b>4018</b>
3	Un risveglio dolce-amaro	<b>1050</b>
4	Una scorciatoia nascosta	<b>0190</b>
5	Diario segreto	<b>4320</b>
6	L'esercito di re Theorem	<b>2010</b>
7	Giochi di <i>gobbit</i>	<b>1331</b>
8	Il sabotaggio del Poliedril	<b>0009</b>
9	Potenze a confronto	<b>1260</b>
10	Gödelum scassinatore	<b>1405</b>
11	Un anello sfolgorante	<b>2492</b>
12	Custodire l'anello	<b>0028</b>
13	L'anello si rivela	<b>0170</b>
14	Le mura di Isengraf	<b>0102</b>
15	Tentativo di fuga	<b>1999</b>
16	La distanza dello scontro	<b>9500</b>