XXIX OLIMPIADE ITALIANA DI MATEMATICA

Cesenatico, 10 maggio 2013

SOLUZIONI

1. Un modellino di automobile viene testato su alcuni circuiti chiusi lunghi 600 metri, composti da tratti piani e tratti in salita o discesa. Tutti i tratti in salita e in discesa hanno la stessa pendenza. I test mettono in risalto alcuni fatti curiosi:

(a) la velocità del modellino dipende solo dal fatto che la macchina stia percorrendo un tratto di salita, piano o discesa; chiamando rispettivamente v_s, v_p e v_d queste tre velocità, si ha $v_s < v_p < v_d$;

(b) v_s, v_p e v_d, espresse in metri al secondo, sono dei numeri interi;

(c) comunque sia composto il circuito (con più o meno salite e discese) il tempo di percorrenza è sempre di 50 secondi.

Trovare tutti i possibili valori di v_s, v_p e v_d.

Soluzione: Indichiamo tutte le lunghezze in metri e tutti i tempi in secondi, omettendo le unità di misura.

Le terne di velocità possibili sono $(v_s, v_p, v_d) = (10, 12, 15)$, $(9, 12, 18)$, $(8, 12, 24)$ e $(7, 12, 42)$.

Consideriamo innanzitutto un circuito completamente in piano lungo 600. L'ipotesi (c) fornisce allora $50 = \dfrac{600}{v_p}$, da cui $v_p = \dfrac{600}{50} = 12$.

Consideriamo poi un generico circuito di lunghezza 600, in cui il tratto in salita sia lungo s, il tratto in piano p ed il tratto in discesa d.

Per costruzione $s + p + d = 600$; inoltre, affinché il circuito si chiuda, il dislivello dato dai tratti in salita deve essere lo stesso dato dai tratti in discesa: siccome le pendenze sono le stesse per tutti i tratti non in piano, ci deve essere tanta salita quanta discesa, cioè $s = d$.

Il tratto piano è allora lungo $p = 600 - s - d = 600 - 2s$, ed il tempo impiegato dalla macchina a percorrere il circuito è $\dfrac{s}{v_s} + \dfrac{p}{v_p} + \dfrac{d}{v_d} = \dfrac{s}{v_s} + \dfrac{600-2s}{12} + \dfrac{s}{v_d} = s\left(\dfrac{1}{v_s} + \dfrac{1}{v_d} - \dfrac{1}{6}\right) + \dfrac{600}{12}$, che è uguale a $50 = \dfrac{600}{12}$ se e solo se $s\left(\dfrac{1}{v_s} + \dfrac{1}{v_d} - \dfrac{1}{6}\right) = 0$.

Le velocità rispettano allora la condizione (c) del testo se e solo se la relazione precedente vale per un qualunque circuito chiuso, cioè per qualunque scelta di s (compreso tra 0 e 300).

Una condizione necessaria e sufficiente sulle velocità è quindi $\dfrac{1}{v_s} + \dfrac{1}{v_d} = \dfrac{1}{6}$; v_s e v_d sono entrambi diversi da zero, quindi possiamo riscrivere questa equazione come $v_s v_d = 6(v_s + v_d)$, ovvero $(v_s - 6)(v_d - 6) = 36$.

v_d è un numero intero maggiore di $v_p = 12$, quindi $v_d - 6$ è un divisore di 36 strettamente maggiore di 6, cioè è uno tra $9, 12, 18$ o 36 (che corrispondono rispettivamente ai valori $15, 18, 24, 42$ per v_d).

Risolvendo l'equazione per v_s otteniamo infine $v_s = 6 + \dfrac{36}{v_d - 6}$, ovvero $v_s = 10, 9, 8, 7$.

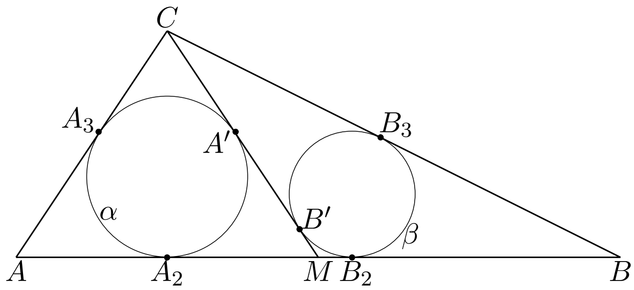
Seconda soluzione: Una volta ottenuta l'equazione $\dfrac{1}{v_s} + \dfrac{1}{v_d} = \dfrac{1}{6}$ è sufficiente osservare che $v_s < v_p = 12$, e d'altro canto non possiamo avere $v_s \leq 6$, perché altrimenti $\dfrac{1}{v_s} \geq \dfrac{1}{6}$, da cui $\dfrac{1}{v_d} \leq 0$, che è chiaramente assurdo. Ne segue che le uniche possibilità per v_s sono $7, 8, 9, 10, 11$, ed è facile verificare quali di queste portano a valori interi per v_d.

2. Nel triangolo ABC supponiamo di avere $a > b$, dove $a = BC$ e $b = AC$. Sia M il punto medio di AB, e siano α e β le circonferenze inscritte, rispettivamente, ai triangoli ACM e BCM. Siano poi A' e B' i punti di tangenza di α e β con CM. Dimostrare che $A'B' = \dfrac{a-b}{2}$.

SOLUZIONE: Chiamiamo $x = MA'$, $y = MB'$, $r = CA'$, $s = CB'$. È chiaro che

$$\pm A'B' = x - y = s - r. \qquad (1)$$

Denotiamo con A_2 ed A_3 i punti di tangenza di AB e AC con α, e con B_2 e B_3 i punti di tangenza di AB e BC con β.



Ora usiamo ripetutamente il fatto che, tracciando le tangenti da un punto X esterno ad una circonferenza γ, e chiamati M ed N i punti di tangenza, si ha $XM = XN$.

Abbiamo che $x = MA_2$, $y = MB_2$, $r = CA_3$, $s = CB'$. Poniamo poi

$$t = AA_2 = AA_3, \qquad u = BB_2 = BB_3.$$

Poiché M è il punto medio di AB, abbiamo $x + t = y + u$. D'altra parte, $t = b - r$, $u = a - s$, da cui $x + b - r = y + a - s$ e quindi

$$(x - y) + (s - r) = a - b.$$

Poiché $a - b > 0$, nella (1) vale il segno $+$ e la tesi è dismostrata.

3. Ogni numero intero viene colorato con uno di due colori, rosso o blu. Sappiamo che, per ogni insieme finito A di interi consecutivi, il valore assoluto della differenza tra il numero degli interi rossi e il numero degli interi blu nell'insieme A è al più 1000. Dimostrare che esiste un insieme di 2000 interi consecutivi fra i quali ci sono esattamente 1000 numeri rossi e 1000 numeri blu.

SOLUZIONE: Dato un intero n, chiamiamo I_n l'insieme dei 2000 numeri consecutivi $\{n, n+1, \ldots, n+1999\}$ di lunghezza 2000, e chiamiamo R_n il numero di interi rossi e B_n il numero di interi blu in I_n: osserviamo che, siccome $R_n + B_n = 2000$ è pari, anche $D_n = R_n - B_n$ è pari. Osserviamo anche che, passando da I_n a I_{n+1}, il numero di naturali bianchi o neri può cambiare di al massimo un'unità, e quindi $D_n - 2 \leq D_{n+1} \leq D_n + 2$.

Supponiamo per assurdo che per nessun n si abbia $D_n = 0$, e supponiamo, senza perdita di generalità, che $D_0 < 0$. Vogliamo dimostrare, per induzione, che $D_n < 0$ per ogni $n \geq 0$: il passo base è vero per ipotesi. D_n è pari e negativo, e $D_{n+1} \leq D_n + 2 < 2$ è pari, e non è zero per ipotesi, e quindi anche D_{n+1} è negativo.

Consideriamo ora gli intervalli I_{2000k} al variare di k nell'intervallo $0 \leq k \leq 500$. Gli I_{2000k} sono a due a due disgiunti, ed in ciascuno di essi, ci sono almeno 1001 numeri blu e al più 999 numeri rossi, quindi nell'intervallo $\{0, 1, \ldots, 2000 \cdot 500 + 1999\}$ ci sono almeno $1001 \cdot 501$ numeri blu e al più $999 \cdot 501$ numeri rossi, contraddicendo l'ipotesi.

4. In quali basi $b > 6$ la scrittura 5654 rappresenta una potenza di un numero primo?

SOLUZIONE: La scrittura 5654 in base b rappresenta il numero $N = 5b^3 + 6b^2 + 5b + 4 = (b+1)(5b^2 + b + 4)$. Se b è dispari, $b + 1$ è pari; viceversa, se b è pari, $5b^2 + b + 4$ è pari. In ogni caso, N è pari, e quindi è una potenza di 2.

Ne segue che $b + 1$ e $5b^2 + b + 4$ sono entrambe potenze di 2: $b + 1 = 2^n$ e $5b^2 + b + 4 = 2^m$. Osserviamo che $5b^2 + b + 4 \geq b + 4$ per ogni b, quindi $m > n$. Dalla prima equazione otteniamo $b = 2^n - 1$, e siccome $b > 6$, allora $n \geq 3$. Sostituendo nella seconda equazione, ricaviamo: $5 \cdot 2^{2n} - 9 \cdot 2^n + 8 = 2^m$. Dividendo per 8 e riarrangiando, otteniamo:

$$5 \cdot 2^{2n-3} - 2^{m-3} = 9 \cdot 2^{n-3} - 1.$$

Dato che $m > n \geq 3$, il lato sinistro dell'equazione è pari, quindi lo è anche $9 \cdot 2^{n-3} - 1$; ne segue che $n = 3$, e l'equazione diventa $5 \cdot 8 - 9 + 1 = 2^{m-3}$, da cui $m = 8$. Quindi la scrittura 5654 in base 7 rappresenta $2048 = 2^{11}$, e $b = 7$ è l'unica soluzione del problema.

SECONDA SOLUZIONE: La prova della divisibilità per 11 per i numeri scritti in base decimale si può mimare così: $b \equiv -1 \pmod{b+1}$, quindi

$$N = 5b^3 + 6b^2 + 5b + 4 \equiv 5(-1)^3 + 6(-1)^2 + 5(-1) + 4 \equiv 0 \pmod{b+1}.$$

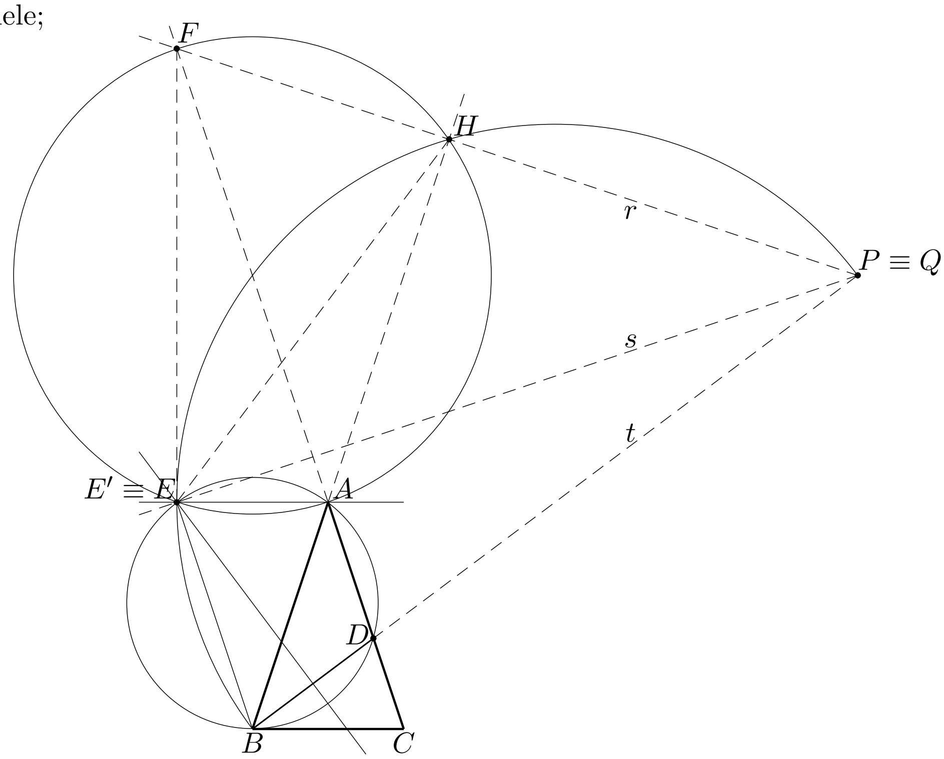
Poiché $(b+1) \mid N$, sia $b+1$ che $N/(b+1)$ devono essere potenze dello stesso primo. Ora $N/(b+1) = 5b^2+b+4 = (5b-4)(b+1) + 8$; ne segue che il massimo comune divisore fra $b+1$ e $N/(b+1)$ deve dividere 8. Ma, fra due potenze dello stesso primo, il massimo comune divisore è il più piccolo dei due numeri: in questo caso, evidentemente $b+1$. Quindi, visto che $b > 6$, l'unica possibilità è $b+1 = 8$, ossia $b = 7$ che, per verifica diretta, dà una soluzione.

5. Dato un triangolo isoscele ABC con $AB = AC$ e $\widehat{BAC} < 60^\circ$, sia D il punto su AC tale che $\widehat{DBC} = \widehat{BAC}$, sia E l'intersezione dell'asse di BD con la retta parallela a BC passante per A, e sia F il punto sulla retta AC, dalla parte di A rispetto a C, tale che la lunghezza di FA sia il doppio della lunghezza di AC.

Infine, siano r la perpendicolare ad AB condotta da F, s la perpendicolare ad AC condotta da E, e t la retta BD. Dimostrare che:

(a) le rette EB e AC sono parallele;

(b) le rette r, s e t concorrono.



Soluzione: Si ponga, per comodità di notazione, $\widehat{BAC} = \alpha$ e $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \beta$.
Si tracci la circonferenza circoscritta al triangolo BDA e sia E' la sua intersezione con la parallela a BC passante per A; mostreremo che E' si trova sull'asse di BD, e deve dunque coincidere con E. Abbiamo $\widehat{BAD} = \widehat{BE'D} = \alpha$ (entrambi insistono su BD), $\widehat{E'DB} = \widehat{E'AB} = \widehat{ABC} = \beta$ (l'ultima uguaglianza segue dal parallelismo delle rette $E'A$ e BC); quindi il triangolo $BE'D$ è simile al triangolo BAC, perciò è isoscele. Ne segue che E' si trovi sull'asse della base BD, come voluto. Inoltre abbiamo così ottenuto che $\widehat{BEA}$ debba essere supplementare ad $\widehat{ADB}$, ovvero uguale a β. Ciò dimostra il parallelismo fra la retta EB e la retta AC.

Sia ora P il punto d'intersezione tra le rette r ed s, Q il punto d'intersezione tra le rette r e t; chiamiamo H la proiezione di F sulla retta AB. Per costruzione, la retta r è perpendicolare alla retta AB, mentre la retta s è perpendicolare ad AC, quindi alla sua parallela BE; in altre parole, gli angoli $\widehat{BEP}$ e $\widehat{BHP}$ sono retti, quindi il quadrilatero $BEHP$ è ciclico. Basterebbe mostrare che Q si trova sulla circonferenza circoscritta a $BEHP$ per concludere che P e Q coincidono (dato che entrambi sono punti sulla retta r diversi da H), da cui la concorrenza delle rette r, s e t.

L'angolo $\widehat{BQH}$, dato che $\widehat{BHQ}$ è retto, vale $90^\circ - (\widehat{ABC} - \widehat{CBD}) = 90^\circ + \alpha - \beta$. Si noti che il quadrilatero $AEFH$ è ciclico: $\widehat{AHF}$ è retto per costruzione; EA è congruente a BC, AF è il doppio di AC, $\widehat{EAF} = \beta$, e dunque il triangolo EAF è simile al triangolo formato da A, B e dal piede dell'altezza di ABC uscente da A, dunque anche l'angolo $\widehat{FEA}$ è retto. Osservando che sia $\widehat{FEH}$ che $\widehat{FAH}$ insistono sull'arco FH, abbiamo mostrato $\widehat{FEH} = \widehat{FAH} = \alpha$. Otteniamo di conseguenza $\widehat{BEH} = \widehat{BEA} + \widehat{AEF} - \widehat{FEH} = \beta + 90^\circ - \alpha$; ovvero gli angoli $\widehat{BQH}$ e $\widehat{BEH}$ sono supplementari, quindi il quadrilatero $BQHE$ è ciclico. Abbiamo così dimostrato che Q appartiene alla circonferenza circoscritta a $BEHP$, da cui la tesi.

6. Due maghi si esibiscono nel seguente numero. All'inizio il primo mago rinchiude il secondo mago in una cabina dove non possa né vedere né sentire nulla. Per iniziare il gioco, il primo mago invita Daniele, un membro del pubblico, a porre su ogni casella di una scacchiera $n \times n$, a propria discrezione, una pedina bianca o nera. Dopodiché chiede a Daniele di indicargli una casella C a sua scelta. A questo punto, il primo mago sceglie una casella D (non necessariamente diversa da C) e sostituisce la pedina che si trova su D con una dell'altro colore (bianca con nera o nera con bianca).

Viene quindi aperta la cabina in cui era rinchiuso il secondo mago. Osservando la scacchiera, il secondo mago riesce a indovinare qual è la casella C. Per quali n i due maghi possono attuare una strategia tale che il loro numero riesca sempre?

Soluzione: Risolveremo un problema leggermente più generale: supponiamo che la scacchiera possa avere un numero qualunque N di caselle, non necessariamente un quadrato. Mostreremo che i maghi hanno una strategia se e solo se N è potenza di due. Nel caso particolare $N = n^2$, segue che n deve essere potenza di due.

Se c'è una strategia, allora N è potenza di due. Contiamo il numero D_c delle disposizioni di pedine che il secondo mago associa a una determinata casella c. Da ogni possibile disposizione iniziale il primo mago può raggiungere una di queste tramite precisamente una modifica, quindi ogni possibile disposizione deve essere raggiungibile partendo da una delle disposizioni associate a c e cambiando precisamente una pedina. Siccome ci sono N possibili cambi di pedina, $D_c \geq 2^N/N$. D'altro canto la somma dei numeri D_c al variare di c fra le N possibili caselle è minore di o uguale a 2^N. Ne segue che $D_c = 2^N/N$ per ogni casella c, quindi N divide 2^N.

Se N è potenza di due, allora c'è una strategia. Per $N = 1$ il secondo mago non può sbagliare. Per $N = 2$, chiamiamo le due caselle x e y: i maghi si accordano per avere nella casella x una pedina bianca se Daniele ha scelto x, e una pedina nera se Daniele ha scelto y. Ora, basta dimostrare che se i maghi hanno una strategia per $N = a$ e per $N = b$, allora hanno una strategia per $N = ab$. La strategia consiste nell'immaginare le caselle arrangiate in una griglia $a \times b$ – con a righe e b colonne – e stipulare che una riga o colonna è *bianca* se contiene un numero pari di pedine bianche, nera altrimenti. In questo modo, cambiando il colore di una pedina, cambia il colore precisamente della riga e della colonna su cui questa si trova. Il primo mago determina la riga e la colonna sulle quali si trova la casella scelta da Daniele, e usa le strategie per $N = a$ e $N = b$ sui colori delle righe e delle colonne rispettivamente, decide quindi di cambiare il colore di precisamente una riga e una colonna, e sostituisce la pedina che si trova alla loro intersezione. Il secondo mago considera i colori delle righe e delle colonne, e applicando le strategia dei casi $N = a$ e $N = b$ determina su che riga e su che colonna deve trovarsi la casella scelta da Daniele.