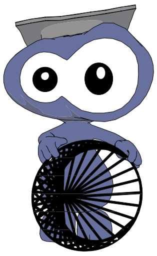
Spazio riservato alla commissione per il punteggio

Numero Identificativo



# XXX Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico, 9 maggio 2014
(Da riempirsi in **stampatello** a cura dello studente)

Cognome: ____________________

Nome: ____________________

Luogo e data di nascita: ____________________

Cittadinanza: ____________________

Codice Fiscale: ____________________

Indirizzo: ____________________

CAP: __________ Città: __________

Provincia: ____________________

Telefono: ____________________

Cellulare: ____________________

e–mail: ____________________

Scuola di appartenenza: ____________________

Indirizzo scuola: ____________________

Anno di corso: __________ Classe e sezione: __________

Tabella riassuntiva di autovalutazione
Barrare con una crocetta le caselle opportune

| Esercizio Numero | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Risolto | | | | | | |
| Parzialmente risolto | | | | | | |
| Non risolto | | | | | | |

**1.** Per ogni numero naturale $n$ di 3 cifre decimali (quindi con la prima cifra diversa da zero), consideriamo il numero $n_0$ ottenuto da $n$ eliminando le sue eventuali cifre uguali a zero. Per esempio, se $n = 205$ allora $n_0 = 25$.

Determinare il numero degli interi $n$ di tre cifre per i quali $n_0$ è un divisore di $n$ diverso da $n$.

**2.** Sia $ABC$ un triangolo tale che, detto $H$ il piede dell'altezza condotta da $C$, si ha $AH = 3 \cdot HB$. Siano inoltre:

– $M$ il punto medio di $AB$;
– $N$ il punto medio di $AC$;
– $P$ il punto dal lato opposto di $B$ rispetto alla retta $AC$ tale che $NP = NC$ e $PC = CB$.

Dimostrare che $\widehat{APM} = \widehat{PBA}$.

**3.** Per ogni intero positivo $n$, sia $D_n$ il massimo comune divisore di tutti i numeri della forma $a^n + (a+1)^n + (a+2)^n$ al variare di $a$ fra tutti gli interi positivi.

(a) Dimostrare che, per ogni $n$, $D_n$ è della forma $3^k$ per qualche intero $k \geq 0$.

(b) Dimostrare che, per ogni $k \geq 0$, esiste un intero $n$ tale che $D_n = 3^k$.

**4.** Su una circonferenza di centro $A$ e raggio $R$ vengono presi nell'ordine quattro punti distinti $B, C, G, H$ in modo tale che $G$ giaccia sul prolungamento della mediana del triangolo $ABC$ condotta da $B$, e $H$ giaccia sul prolungamento dell'altezza di $ABC$ condotta da $B$. Detta $X$ l'intersezione fra le rette $AC$ e $GH$, si dimostri che il segmento $AX$ è lungo $2R$.

**5.** Dimostrare che esiste un intero positivo che può essere scritto come somma di 2015 potenze 2014-esime distinte di interi positivi $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2015}$ in almeno due modi.

**6.** Una scacchiera quadrata $(2n+1) \times (2n+1)$, con $n > 0$, è colorata in modo tale che ogni casella sia bianca o nera. Una casella è detta *speciale* se ci sono almeno altre $n$ caselle dello stesso colore nella sua riga, e almeno altre $n$ caselle dello stesso colore nella sua colonna.

(a) Dimostrare che esistono almeno $2n+1$ caselle speciali.

(b) Fornire un esempio in cui ci siano al più $4n$ caselle speciali.

(c) Determinare, in funzione di $n$, quale è il minimo numero possibile di caselle speciali.