# XXX OLIMPIADE ITALIANA DI MATEMATICA

Cesenatico, 9 maggio 2014

**SOLUZIONI**

**1.** Per ogni numero naturale $n$ di 3 cifre decimali (quindi con la prima cifra diversa da zero), consideriamo il numero $n_0$ ottenuto da $n$ eliminando le sue eventuali cifre uguali a zero. Per esempio, se $n = 205$ allora $n_0 = 25$.

Determinare il numero degli interi $n$ di tre cifre per i quali $n_0$ è un divisore di $n$ diverso da $n$.

Soluzione: Escludiamo subito il caso in cui $n$ abbia tutte le cifre diverse da zero, in quanto in questo caso si ha $n_0 = n$. Restano quindi due possibilità:

1) $n$ ha la terza cifra uguale a zero; la scrittura decimale di $n$ è del tipo $n = ab0$, $n_0 = ab$ e $n_0|n$ per ogni scelta di $a \in \{1 \dots, 9\}$ e di $b \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Relativamente a questo caso, ci sono dunque $9 \times 10 = 90$ possibilità per $n$.

2) $n$ ha la terza cifra diversa da zero ma la seconda uguale a zero; in questo caso $n$ si scrive nella forma $a0b$ e $n_0$ nella forma $ab$. Ricordando il significato della scrittura decimale, cerchiamo dunque i casi in cui $10a + b$ divide $100a + b$. Poiché sicuramente $10a + b$ divide $10(10a + b) = 100a + 10b$, è anche equivalente vedere quando $10a + b$ divide la differenza $(100a + 10b) - (10a + b) = 9b$.
Scrivendo $k(10a+b) = 100a+b$ e considerando l'ultima cifra decimale, si ottiene che $(k-1)b$ è divisibile per 10, per cui almeno uno fra $k-1$ e $b$ è divisibile per 5. Poiché evidentemente $1 < k < 10$ e $1 \leq b \leq 9$, si ha che $k - 1 = 5$ oppure $b = 5$.
Per $k - 1 = 5$ otteniamo $60a + 6b = 100a + b$, da cui $b = 8a$ e quindi $a = 1$, $b = 8$. Si verifica che $n = 108$ è in effetti una soluzione, in quanto 18 divide 108.
Per $b = 5$ usiamo la proprietà equivalente che $10a + b$ divide $9b$, che diventa $10a + 5$ divide 45; si vede immediatamente che i divisori di 45 della forma $10a + 5$ con $a \geq 1$ sono 15 e 45, dando le due soluzioni $n = 105$ (15 divide 105) e $n = 405$ (45 divide 405).

In conclusione, ci sono 90 soluzioni nel caso 1) e 3 soluzioni nel caso 2), per un totale di 93 soluzioni.

**2.** Sia $ABC$ un triangolo tale che, detto $H$ il piede dell'altezza condotta da $C$, si ha $AH = 3 \cdot HB$. Siano inoltre:

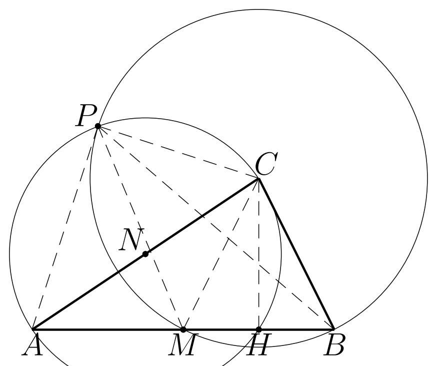
– $M$ il punto medio di $AB$;

– $N$ il punto medio di $AC$;

– $P$ il punto dal lato opposto di $B$ rispetto alla retta $AC$ tale che $NP = NC$ e $PC = CB$.

Dimostrare che $\widehat{APM} = \widehat{PBA}$.

Soluzione: Poiché $AH = 3HB$, $H$ è il punto medio di $MB$; dunque $CH$ è altezza e mediana del triangolo $CMB$, che è quindi isoscele. Ma allora $M$ giace sulla circonferenza di centro $C$ e raggio $CB$. Ne deriva che $\widehat{MPB} = \widehat{MCB}/2 = \widehat{HCB}$ (angolo alla circonferenza e angolo al centro che insistono sullo stesso arco).
Il triangolo $CPB$ è, per definizione, isoscele su base $PB$, e dunque $\widehat{CPB} = \widehat{CBP}$. Inoltre, poiché $P$ giace sulla circonferenza di diametro $CA$, $\widehat{CPA}$ è un angolo retto.
Ma dunque $90° = \widehat{CPB} + \widehat{BPM} + \widehat{MPA}$, e al tempo stesso il computo della somma degli angoli interni del triangolo $CHB$ dà $90° = \widehat{HCB} + \widehat{CBP} + \widehat{PBA}$. Poiché, come mostrato sopra, $\widehat{CPB} = \widehat{CBP}$ e $\widehat{BPM} = \widehat{HCB}$, deve essere $\widehat{MPA} = \widehat{PBA}$.




**3.** Per ogni intero positivo $n$, sia $D_n$ il massimo comune divisore di tutti i numeri della forma $a^n + (a + 1)^n + (a + 2)^n$ al variare di $a$ fra tutti gli interi positivi.

(a) Dimostrare che, per ogni $n$, $D_n$ è della forma $3^k$ per qualche intero $k \geq 0$.

(b) Dimostrare che, per ogni $k \geq 0$, esiste un intero $n$ tale che $D_n = 3^k$.

SOLUZIONE: Per definizione di $D_n$, prendendo $a = D_n$ vediamo che $D_n$ divide $D_n^n+(D_n+1)^n+(D_n+2)^n$, e prendendo $a = D_n + 1$ si ottiene anche che $D_n$ divide $(D_n + 1)^n + (D_n + 2)^n + (D_n + 3)^n$. Per differenza $D_n$ divide $((D_n + 1)^n + (D_n + 2)^n + (D_n + 3)^n) - (D_n^n + (D_n + 1)^n + (D_n + 2)^n) = (D_n + 3)^n - D_n^n$, e siccome chiaramente $D_n$ divide $D_n^n$ ancora per differenza deduciamo che $D_n$ divide $(D_n+3)^n$. Sviluppiamo ora $(D_n+3)^n$: è una somma di termini della forma $D_n^b 3^{n-b}$, dove $b$ varia tra 0 e $n$, e quindi ognuno di essi è divisibile per $D_n$, con l'unica eccezione dell'unico termine con $b = 0$. Possiamo quindi scrivere $(D_n + 3)^n = 3^n +$ multipli di $D_n$, da cui deduciamo che $D_n$ divide $3^n$: ne segue che $D_n$ stesso è una potenza di 3, come voluto.

Osserviamo inannzitutto che $D_2 = 1$: infatti $D_2$ è una potenza di 3 (per il punto a) e per definizione divide $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$, il che forza $D_2 = 1$.

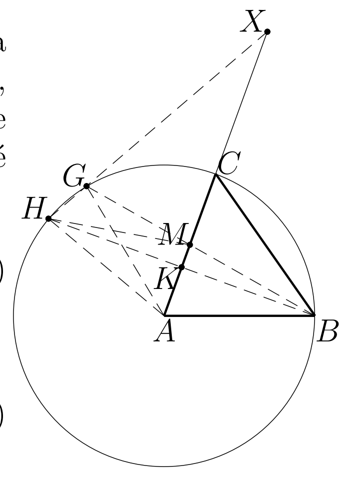
Si ha poi $D_1 = 3$: prendendo $a = 1$ otteniamo che $D_1$ divide 6, quindi (siccome è una potenza di 3) $D_1$ è 1 o 3. Ma d'altro canto per ogni $a$ il numero $a + (a + 1) + (a + 2) = 3(a + 1)$ è un multiplo di 3, per cui $D_1 = 3$.

Vogliamo ora mostrare che per ogni $k \geq 0$ si ha $D_{3^k} = 3^{k+1}$. Per $k = 0$ l'abbiamo appena verificato. Dal momento che $D_{3^k}$ è una potenza di 3 è sufficiente vedere che $D_{3^k}$ è divisibile per $3^{k+1}$ ma non per $3^{k+2}$. Siccome si passa da $a^n + (a + 1)^n + (a + 2)^n$ a $(a + 1)^n + (a + 2)^n + (a + 3)^n$ aggiungendo $(a + 3)^n - a^n$, per dimostrare che $3^{k+1}$ divide $D_{3^k}$ basta verificare che $3^{k+1}$ divide $1^{3^k} + 2^{3^k} + 3^{3^k}$ ed ognuna delle differenze $(a + 3)^{3^k} - a^{3^k}$. Per dimostrare che $D_{3^k}$ non è divisibile per $3^{k+2}$ è sufficiente dimostrare che $1^{3^k} + 2^{3^k} + 3^{3^k}$ non è divisibile per $3^{k+2}$.

Occupiamoci prima dell'affermazione sulle differenze, per induzione su $k$: per $k = 0$ è ovvia. Supponiamo allora che, per un certo $k$, $(a+3)^{3^k} - a^{3^k}$ sia multiplo di $3^{k+1}$. Possiamo scrivere $(a+3)^{3^k} = a^{3^k} + c \cdot 3^{k+1}$, ed elevando al cubo troviamo $(a + 3)^{3^{k+1}} = a^{3^{k+1}} + 3a^{2\cdot 3^k} \cdot c \cdot 3^{k+1} + 3a^{3^k} \cdot c^2 \cdot 3^{2(k+1)} + c^3 \cdot 3^{3(k+1)}$, e cioè $(a + 3)^{3^{k+1}} - a^{3^{k+1}} = a^{2\cdot 3^k} \cdot c \cdot 3^{k+2} + a^{3^k} \cdot c^2 \cdot 3^{2k+3} + c^3 \cdot 3^{3k+1}$, che è chiaramente divisibile per $3^{k+2}$, come voluto.

Per quanto riguarda $1^{3^k} + 2^{3^k} + 3^{3^k}$, dimostriamo allo stesso tempo che è divisibile per $3^{k+1}$ ma non per $3^{k=2}$. L'affermazione è banale per $k = 0$, in quanto $1 + 2 + 3$ è divisibile per 3 ma non per 9. Per $k \geq 1$ osserviamo che $3^{3^k}$ è divisibile per $3^{k+2}$, quindi è sufficiente dimostrare l'affermazione per $1^{3^k} + 2^{3^k}$ invece che per $1^{3^k} + 2^{3^k} + 3^{3^k}$. Di nuovo, usiamo l'induzione su $k$. Per $k = 1$ si ha che $1 + 2^3$ è divisibile per $3^2$ ma non per $3^3$. Supponiamo ora che $1 + 2^{3^k}$ sia divisibile per $3^{k+1}$ ma non per $3^{k+2}$: questo vuol dire che $1 + 2^{3^k} = 3^{k+1} \cdot c$, dove $c$ non è un multiplo di 3. Si ha allora $1 + 2^{3^{k+1}} = 1 + (2^{3^k})^3 = 1 + (3^{k+1}c - 1)^3 = 3^{k+2} \left(c - 3^{k+1}c^2 + 3^{2k+1}c^3\right)$. Il membro di destra è multiplo di $3^{k+2}$ ma non di $3^{k+3}$: infatti $\left(c - 3^{k+1}c^2 + 3^{2k+1}c^3\right)$ non è divisibile per 3, visto che è la somma di multipli di 3 e di $c$, il quale per ipotesi non è divisibile per 3. Questo conclude la dimostrazione.

**4.** Su una circonferenza di centro $A$ e raggio $R$ vengono presi nell'ordine quattro punti distinti $B, C, G, H$ in modo tale che $G$ giaccia sul prolungamento della mediana del triangolo $ABC$ condotta da $B$, e $H$ giaccia sul prolungamento dell'altezza di $ABC$ condotta da $B$. Detta $X$ l'intersezione fra le rette $AC$ e $GH$, si dimostri che il segmento $AX$ è lungo $2R$.




SOLUZIONE: Denotiamo con $M$ il punto medio di $AC$ e con $K$ il piede dell'altezza di $ABC$ condotta da $B$. Poiché $AC$ è perpendicolare a $BH$ e $AB = AH = R$, si ha che $AC$ è l'asse di $BH$, dunque $BK = KH$. I triangoli rettangoli $AKB$ e $AKH$ sono congruenti, così come i triangoli rettangoli $MKB$ e $MKH$, perché hanno i lati rispettivi uguali. Quindi

$$\widehat{MBA} = \widehat{MBK} + \widehat{KBA} = \widehat{MHK} + \widehat{KHA} = \widehat{MHA}. \qquad (1)$$

Poiché inoltre il triangolo $AGB$ è isoscele con base $BG$, si ha anche

$$\widehat{MGA} = \widehat{MBA}. \qquad (2)$$

Dalla (1) e dalla (2) si ricava che $\widehat{MHA} = \widehat{MGA}$. I due punti $G$ ed $H$ stanno dalla stessa parte rispetto alla retta $MA$ e sottendono il segmento $MA$ con lo stesso angolo, quindi il quadrilatero $AMGH$ è ciclico. In particolare, $\widehat{AHG} + \widehat{AMG} = 180°$.

Consideriamo ora i triangoli $HAX$ e $MAB$; essi sono simili, in quanto $\widehat{XAH} = \widehat{BAM}$ (sono angoli corrispondenti dei due triangoli congruenti $AKH$ e $KAB$) e $\widehat{AHX} = \widehat{AMB}$ (sono entrambi supplementari di $\widehat{AMG}$).

Ne segue che $AX/AB = AH/AM, \quad AX = (AB/AM) \cdot AH = 2R$.

**5.** Dimostrare che esiste un intero positivo che può essere scritto come somma di 2015 potenze 2014-esime distinte di interi positivi $x_1 < x_2 < \cdots <_{2015}$ in almeno due modi.

Soluzione: Sia $N$ un intero positivo maggiore o uguale a 2015. Consideriamo tutte le successioni crescenti $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2015} \leq N$ di 2015 interi positivi minori o uguali a $N$. Il numero di queste successioni è $\binom{N}{2015}$, poiché ogni successione è univocamente determinata dalla scelta di un insieme di 2015 interi positivi minori o uguali a $N$. Per ognuna di queste successioni calcoliamo la somma $x_1^{2014} + x_2^{2014} + \ldots + x_{2015}^{2014}$. Dato che ciascun addendo è minore o uguale a $N^{2014}$, ogni somma vale al più $2015N^{2014}$. Abbiamo quindi $\binom{N}{2015}$ somme, ciascuna minore o uguale a $2015N^{2014}$. Se il numero delle somme fosse maggiore di $2015N^{2014}$, allora dovrebbero necessariamente esistere due somme uguali, poiché se fossero tutte diverse sarebbero almeno $\binom{N}{2015}$. Per risolvere l'esercizio, che ci chiede proprio di dimostrare l'esistenza per un qualche $N$ intero positivo di due somme uguali, ci basta perciò dimostrare che esiste un intero positivo $N \geq 2015$ per il quale vale la disuguaglianza $\binom{N}{2015} > 2015N^{2014}$. Osserviamo che $\binom{N}{2015} = \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-2014)}{2015!}$ è un polinomio in $N$ di grado 2015, mentre $2015N^{2014}$ è di grado 2014. Dato che entrambi i coefficienti dei termini di grado massimo dei due polinomi sono positivi e 2015, il grado del primo polinomio, è maggiore di 2014, il grado del secondo polinomio, esiste sicuramente un intero positivo $N$ per il quale vale la disuguaglianza $\binom{N}{2015} > 2015N^{2014}$.

**6.** Una scacchiera quadrata $(2n+1) \times (2n+1)$, con $n > 0$, è colorata in modo tale che ogni casella sia bianca o nera. Una casella è detta *speciale* se ci sono almeno altre $n$ caselle dello stesso colore nella sua riga, e almeno altre $n$ caselle dello stesso colore nella sua colonna.

(a) Dimostrare che esistono almeno $2n+1$ caselle speciali.

(b) Fornire un esempio in cui ci siano al più $4n$ caselle speciali.

(c) Determinare, in funzione di $n$, quale è il minimo numero possibile di caselle speciali.

Soluzione: (a) Questo punto sarà, in realtà, una conseguenza del punto (c). Per completezza, però, diamo una dimostrazione più semplice. Diciamo che una casella è in maggioranza nella sua riga o colonna se ha il medesimo colore di almeno altre $n$ caselle della sua riga o colonna rispettivamente. Chiaramente, una casella è speciale se si trova in maggioranza sia nella sua riga sia nella sua colonna. Ora, il numero delle caselle in maggioranza lungo almeno una delle due direzioni può essere ottenuto sommando il numero delle caselle in maggioranza nella loro riga, più il numero delle caselle in maggioranza nella loro colonna, meno il numero delle caselle speciali, che sono state contate due volte. Il totale, sappiamo, non può fare più di $(2n+1)^2$, e i due numeri da sommare non possono valere meno di $(2n+1)(n+1)$, quindi la quantità sottratta deve essere almeno $2(2n+1)(n+1) - (2n+1)^2$, vale a dire $2n+1$.

(b) Coloriamo la prima riga in alto della scacchiera interamente di nero, la prima colonna a sinistra, ad eccezione della casella in alto a sinistra, interamente di bianco, ed il resto a scacchi. In questo modo, tutte le righe eccetto la prima hanno una maggioranza di caselle bianche, e tutte le colonne eccetto la prima hanno una maggioranza di caselle nere. Le sole caselle speciali possono trovarsi, quindi, sulla prima riga o sulla prima colonna. D'altro canto, si constata immediatamente che tutte le caselle sulla prima riga o sulla prima colonna sono speciali ad eccezione dell'angolo in alto a sinistra. Il totale è quindi $4n$.

(c) Vedremo che ci sono sempre almeno $4n$ caselle speciali, l'esempio dato al punto precedente ci permette, allora, di concludere che questo è il minimo. Le $2n+1$ righe della scacchiera si dividono in $r_b$ righe contenenti in maggioranza caselle bianche, e $r_n$ righe contenenti in maggioranza caselle nere.

Analogamente, le colonne si dividono in $c_b$ a maggioranza bianca e $c_n$ a maggioranza nera. A meno di ruotare la scacchiera di novanta gradi, operazione che scambia le righe con le colonne, e di scambiare il bianco col nero, possiamo supporre che ciascuno di questi quattro numeri sia minore di o uguale a $r_b$. In particolare sappiamo, quindi, che $r_b$ vale almeno $n+1$, altrimenti $r_b+r_n$ non potrebbe valere $2n+1$. Le $r_b$ righe a maggioranza bianca contengono almeno $(n+1)r_b$ caselle bianche, mentre le $c_n$ colonne a maggioranza nera contengono almeno $(n+1)c_n$ caselle nere. Quelle, fra queste $(n+1)(r_b+c_n)$ caselle, che non sono all'intersezione fra un riga a maggioranza bianca e una colonna a maggioranza nera, devono essere speciali. Il numero delle caselle speciali non può, quindi, essere inferiore a $(n+1)(r_b+c_n)-r_bc_n$. Questa espressione è di primo grado in $c_n$, e il coefficiente di $c_n$ è negativo o nullo, il minimo valore si ottiene quindi quando $c_n$ è più grande possibile. D'altro canto, $c_n$ non può eccedere $r_b$, per cui abbiamo almeno $(2n+2)r_b-r_b^2$ caselle speciali. Per valori di $r_b$ non inferiori a 2 e non superiori a $2n$, quest'ultima quantità è almeno $4n$. Rimangono così due casi, o $r_b \leq 1$ o $r_b = 2n+1$. Il primo è chiaramente assurdo, perché $r_b$ è almeno $n+1$. Esaminiamo il secondo e ultimo caso. Siccome $r_b = 2n+1$, non ci sono meno di $(2n+1)(n+1)$ caselle bianche. Se $c_n$ valesse $2n$ o più, ci sarebbero almeno $2n(n+1)$ caselle nere. Però, così, avremmo più di $(2n+1)^2$ caselle in totale. Ne segue che $c_n$ vale al più $2n-1$. Quindi, in questo caso, le caselle speciali sono almeno $(n+1)4n-(2n+1)(2n-1) = 4n+1$.