XXXI Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico, 8 maggio 2015

Soluzioni

1. Sia dato un parallelepipedo rettangolo $ABCDA'B'C'D'$, dove $ABCD$ è la faccia inferiore con le lettere assegnate in senso orario, e A, B, C, e D stanno sotto A', B', C', e D' rispettivamente. Il parallelepipedo è diviso in otto pezzi da tre piani ortogonali fra loro e paralleli alle facce del parallelepipedo. Per ogni vertice P del parallelepipedo si indichi con V_P il volume del pezzo di parallelepipedo che contiene P. Sapendo che $V_A = 40$, $V_C = 300$, $V_{B'} = 360$ e $V_{C'} = 90$, qual è il volume del parallelepipedo $ABCDA'B'C'D'$?

Soluzione: Chiamiamo x, y, z le distanze di A dai tre piani dei tagli, e x', y', z' le distanze di C' dagli stessi piani, di modo che $x + x' = AB$, $y + y' = AD$, $z + z' = AA'$.

Quando due pezzi hanno una faccia in comune, i loro volumi stanno in proporzione con le rispettive altezze, e quindi otteniamo le seguenti uguaglianze:

$$\frac{y}{y'} = 4 = \frac{V_{B'}}{V_{C'}} = \frac{V_B}{V_C}, \quad \frac{z}{z'} = \frac{10}{3} = \frac{V_C}{V_{C'}}, \quad \frac{x}{x'} = \frac{V_A}{V_B}.$$

Dalla prima uguaglianza ricaviamo che $V_B = 4V_C = 1200$, e sostituendo nell'ultima ricaviamo che $\frac{x}{x'} = \frac{1}{30}$. Se chiamiamo V il volume del parallelepipedo, si ha:

$$\frac{V}{V_{C'}} = \frac{(x + x')(y + y')(z + z')}{x'y'z'} = \left(\frac{x}{x'} + 1\right)\left(\frac{y}{y'} + 1\right)\left(\frac{z}{z'} + 1\right) = \frac{403}{18},$$

da cui $V = \frac{403}{18} V_{C'} = \frac{403}{18} \cdot 90 = 2015$.

2. Un servizio di streaming musicale propone canzoni classificate in 10 generi musicali, in modo che ogni brano appartenga ad uno e un solo genere. Le canzoni vengono suonate una dopo l'altra: le prime 17 sono scelte dall'utente, ma a partire dalla diciottesima il servizio determina automaticamente quale canzone suonare. Elisabetta ha notato che, se si fa la classifica di quali generi compaiano più volte nel corso degli ultimi 17 brani suonati, la nuova canzone appartiene sempre al genere in testa alla classifica o, in caso di pari merito, a uno dei primi ex-aequo.
Dimostrare che, comunque siano scelti i primi 17 brani, da un certo punto in poi le canzoni proposte sono tutte dello stesso genere.

Soluzione: Supponiamo che ad un certo punto venga prodotta una sequenza di 17 canzoni consecutive (diciamo le numero $k, k + 1, \dots, k + 16$) in cui un unico genere è in maggioranza stretta, chiamiamolo A; allora la $(k + 17)$-esima canzone apparterrà a quel genere. Se la k-esima canzone apparteneva anch'essa al genere A, la classifica dei generi rimane invariata, e quindi A è ancora in maggioranza stretta; se la k-esima canzone apparteneva a un genere B diverso da A, la nuova classifica ha un'occorrenza in più per il genere A e una in meno per il genere B, quindi il genere A è ancora in maggioranza stretta. Ne consegue che, se a un certo punto un genere è in maggioranza stretta, tutte le canzoni suonate da allora in poi apparterranno a quel genere.

Analogamente si vede che se un genere C è in minoranza ad un certo punto, allora rimane in minoranza da quel punto in poi. Se le prime 17 canzoni hanno un genere in maggioranza stretta, il problema è dunque risolto. Altrimenti deve esistere un genere che compare in minoranza: infatti, se tutti i generi che compaiono fossero primi ex-aequo, 17 dovrebbe essere divisibile per il loro numero; ma, poiché 17 è primo, ciò sarebbe possibile solo se esistessero 17 generi distinti (ma ne esistono soltanto 10) o se comparisse un unico genere, che sarebbe quindi in maggioranza stretta.

Supponiamo che la canzone i appartenga a un genere C, minoritario fra le canzoni $1, \dots, 17$; consideriamo la sequenza delle canzoni $i, i + 1, \dots, i + 16$ e supponiamo che vi siano più generi primi ex-aequo in classifica (altrimenti abbiamo finito), fra cui il genere che verrà assegnato alla canzone $i+17$: chiamiamolo D; poiché il genere C è partito in minoranza, D è diverso da C. Allora la classifica dei generi per le canzoni dalla $i+1$ alla $i+17$ ha un'occorrenza in meno per il genere C e una in più per il genere D, che si trova quindi in maggioranza stretta, e sarà l'unico suonato a partire dalla canzone $i+18$.

3. Sia ABC un triangolo, sia K il piede della bisettrice relativa a BC e sia J il piede della *trisettrice* relativa a BC più vicina al lato AC (ossia J è il punto su BC tale che $3 \cdot \angle CAJ = \angle CAB$). Siano poi C' e B' due punti sulla retta AJ, dalla parte di J rispetto ad A, tali che $AC' = AC$ e $AB = AB'$. Dimostrare che il quadrilatero $ABB'C$ è inscrivibile in una circonferenza se e solo se le rette $C'K$ e $B'B$ sono parallele.

Soluzione: Poniamo anzitutto $\theta = \angle CAJ$, cosicché $\angle JAB = 2\theta$ e $\angle JAK = \theta/2$.

Se il quadrilatero $ABB'C$ è ciclico, allora $\angle CBB' = \theta$, poiché insiste sullo stesso arco dell'angolo $\angle CAB'$; d'altra parte, poiché $\angle AB'B = \angle ABB' = (180° - 2\theta)/2$ per costruzione, gli angoli $\angle JBB'$ e $\angle BB'J$ sono complementari, dunque AJ è ortogonale a BC. Ora, $\angle AC'C = \angle ACC' = (180° - \theta)/2$, perciò $\angle JCC' = 90° - \angle AC'C = \theta/2$. Ma allora $\angle C'CK = \theta/2 = \angle C'AK$; questo implica che il quadrilatero $AKC'C$ è ciclico, e dunque $\angle CKC' = \angle CAC' = \theta = \angle CBB'$. Poiché formano angoli corrispondenti congruenti con la retta trasversale BC, le rette $C'K$ e BB' sono dunque parallele.

Supponiamo ora che le rette JK e BB' siano parallele. Gli angoli corrispondenti $\angle AC'K$ e $\angle AB'B$ formati con la retta AB' devono essere congruenti, dunque entrambi uguali a $(180° - 2\theta)/2$ (dato che il triangolo ABB' è isoscele). Ne segue che $\angle KC'C = \angle KC'A + \angle AC'C = 180° - \frac{3}{2}\theta$; dunque $\angle KC'C$ è supplementare di $\angle CAK$, e il quadrilatero $CAKC'$ è ciclico. Ma allora $\angle B'BC = \angle C'KC = \angle C'AC = \theta$ (dove la prima uguaglianza segue dal parallelismo e la seconda dalla ciclicità di $CAKC'$); quindi anche il quadrilatero $CABB'$ è ciclico.

4. Determinare tutte le coppie di numeri interi (a,b) che risolvono l'equazione $a^3 + b^3 + 3ab = 1$.

Soluzione: L'equazione è simmetrica in a e b, quindi possiamo limitarci a considerare le soluzioni con $a \geq b$. Non ci sono soluzioni con a e b entrambi positivi: infatti in tal caso avremmo $a^3+b^3+3ab \geq 1+1+3 = 5 > 1$, assurdo. Se almeno uno tra a e b è uguale a zero, diciamo b, allora sostituendo nel testo troviamo $a^3 = 1$, cioè $a = 1$, da cui le due soluzioni $(1,0)$ e $(0,1)$. Se poi a e b sono entrambi strettamente minori di 0, allora (supponendo ancora $b \leq a < 0$) troviamo $a^3 + b^3 + 3ab < b(b^2 + 3a)$; se avessimo $b \leq -3$, allora avremmo anche $b^2 + 3a \geq -3b + 3a = 3(a-b) \geq 0$ e quindi $b(b^2+3a)$ non potrebbe essere positivo. Ne seguirebbe che $a^3 + b^3 + 3ab < b(b^2+3a) \leq 0$, e quindi (a,b) non può essere una soluzione se $b \leq -3$. Dobbiamo quindi controllare i casi $b = -2$ e $b = -1$, che (ricordando che stiamo supponendo $a < 0$) portano all'unica soluzione $(a,b) = (-1,-1)$. Ci restano quindi da determinare le soluzioni con $a > 0$ e $b < 0$: poniamo $c = -b$, cosicché c è un intero positivo. L'equazione si riscrive nelle due forme equivalenti

$$3ac + 1 = a^3 - c^3, \quad a^3 = c^3 + 3ac + 1; \tag{1}$$

dalla seconda espressione ricaviamo che $a > c$, mentre dalla prima troviamo $3ac + 1 = (a-c)(c^2 + ca + a^2)$. Siccome $a - c \geq 1$ abbiamo allora

$$3ac + 1 = (a-c)(c^2 + ca + a^2) \geq c^2 + ca + a^2,$$

da cui $1 \geq c^2 - 2ca + a^2$, ovvero $(a-c)^2 \leq 1$. Siccome abbiamo già osservato che $a - c$ è positivo si deve avere $a - c = 1$, e sostituendo $a = c+1$ in (**??**) troviamo

$$c^3 + 3c^2 + 3c + 1 = c^3 + 3c(c+1) + 1,$$

un'equazione che è verificata per qualunque valore di c. Ricordandoci del fatto che all'inizio avevamo supposto $a \geq b$ vediamo allora che le soluzioni dell'equazione proposta sono la coppia $(a,b) = (-1,-1)$ e le infinite coppie $(a,b) = (a,-c) = (c+1,-c)$ per ogni valore intero di c: quelle con $c \geq 0$ sono quelle per cui $a \geq b$, e quelle con $c < 0$ sono le simmetriche con $a < b$.

Seconda soluzione: Osserviamo che

$$a^3 + b^3 - 1 + 3ab = a^3 + b^3 + (-1)^3 - 3ab \cdot (-1) = (a+b-1)(a^2 + b^2 + 1 - ab + a + b),$$

quindi le coppie della forma $(n, 1-n)$ sono soluzioni per ogni n intero.

Moltiplicando per 4 il secondo fattore, poi, possiamo scrivere

$$4a^2 + 4b^2 + 4 - 4ab + 4a + 4b = (2a - b + 1)^2 + 3(b + 1)^2,$$

che, essendo una somma di quadrati, si annulla solo quando $(2a - b + 1) = (b + 1) = 0$, ovvero quando $a = b = -1$.

5. Siano Γ una circonferenza, AB una sua corda, C un punto interno ad AB, r una retta per C tale che, dette D ed E le intersezioni di r con Γ, esse si trovino in parti opposte rispetto all'asse di AB. Siano poi Γ_D la circonferenza tangente esternamente a Γ in D e tangente in un punto F ad AB, Γ_E la circonferenza tangente esternamente a Γ in E e tangente in un punto G ad AB. Dimostrare che $CA = CB$ se e solo se $CF = CG$.

Soluzione: Supponiamo dapprima che $CA = CB$. Sia O il centro di Γ, r il raggio di Γ e siano M, N, rispettivamente, le intersezioni con la retta AB della tagente a Γ_D in D e a Γ_E in E.
I quadrilateri $DMCO$ e $ENOC$ sono ciclici: infatti, $\angle MCO = \angle MDO = 90°$ e $\angle NCO = \angle NEO = 90°$ (osserviamo che non è importante che C, D (rispettivamente C, E) stiano dalla stessa parte o da parti opposte di MO (rispettivamente NO), in quanto due angoli di $90°$ sono sia uguali che supplementari).
Sia ora $\gamma = \angle MCD = \angle NCE$. Per la ciclicità dei quadrilateri $DMCO$ e $ENOC$ abbiamo che $\angle MOD = \angle NOE = \gamma$. Ne segue che i triangoli rettangoli MOD e NOE sono simili e con un cateto uguale ($OD = OE = r$), e quindi sono congruenti. Pertanto $MD = NE$ e $MO = NO$.
Ora MD e MF sono le tangenti da M a Γ_D, per cui $MD = MF$; analogamente, $NE = NG$.
Dall'uguaglianza $MO = NO$ si ricava che MON è un triangolo isocele, di cui CO è l'altezza rispetto alla base MN: ne segue che $CM = CN$.
Riassumendo, $CF = CM + MF = CM + MD = CN + NE = CN + NG = CG$.
(Si noti che la dimostrazione è valida anche nel caso in cui AB sia un diametro: i quadrilateri ciclici $DMCO$ e $ENOC$ divengono semplicemente i due triangoli rettangoli congruenti MOD e NOE.)

Viceversa, supponiamo che $CF = CG$. Con le notazioni precendenti, si ha immediatamente che $CM + MD = CN + NE$. Osserviamo ora che $\angle CDM$ e $\angle CEN$ sono supplementari, in quanto, posto $\varphi = \angle EDO = \angle DEO$, uno di essi è uguale a $90° + \varphi$ e l'altro a $90° - \varphi$. In particolare, $\sin(\angle CDM) = \sin(\angle CEN) = \cos\varphi$.
Usiamo il teorema dei seni sui triangoli CDM e CEN. Abbiamo:

$$\frac{CM}{\cos\varphi} = \frac{MD}{\sin\gamma} \quad \text{e} \quad \frac{CN}{\cos\varphi} = \frac{EN}{\sin\gamma},$$

e quindi $CM/CN = MD/EN$. Visto che $CM + MD = CN + NE$, questo rapporto è uguale a 1, ossia $CM = CN$ e $MD = NE$. I triangoli rettangoli MDO e NEO sono congruenti, poiché hanno i due cateti uguali. Ne segue che $MO = ON$ e il triangolo MON è isoscele. Ma allora C, che è il punto medio della base MN, è anche il piede dell'altezza, ossia OC è perpendicolare ad AB, e quindi C è il punto medio di AB.

Seconda soluzione: Siano O il centro di Γ e O_D quello di Γ_D. Siano I l'intersezione dell'asse di AB con Γ dalla parte di D rispetto ad AB e J quella dalla parte di E. Dimostriamo che i punti I, D ed F sono allineati. I triangoli O_DDF e ODI sono isosceli di basi FD e DI, dato che O_DD e O_DF sono raggi di Γ_D, mentre OI e OD sono raggi di Γ. Poiché le rette IJ e O_DF sono entrambe ortogonali alla retta AB, sono parallele tra loro; inoltre, poiché OD e DO_D sono ortogonali alla tangente comune a Γ e Γ_D in D, i punti O, D, O_D sono allineati. Ma allora $\angle IOD = \angle FO_DD$ perché alterni interni, da cui i due triangoli isosceli O_DDF e ODI sono simili, quindi $\angle FDO_D = \angle ODI$. Ne segue che F, D, I sono allineati. In modo analogo si ottiene che J, E, G sono allineati.

Sia H il punto di intersezione tra AB e IJ e sia D' il punto di intersezione tra FJ e Γ. Dimostriamo che $\angle JHD' = \angle DHI$. Il quadrilatero $FDHJ$ è ciclico, in quanto $\angle JHF = \angle JDF = 90°$; dunque abbiamo $\angle DHI = \angle DFJ$, poiché entrambi supplementari a $\angle DHJ$. Similmente, anche il quadrilatero $FIHD'$ è ciclico ($\angle FHI = \angle FD'I = 90°$), e quindi abbiamo $\angle JHD' = \angle D'FI = \angle DFJ$, in quanto entrambi supplementari a $\angle D'HI$. Quindi l'uguaglianza $\angle JHD' = \angle DHI$ è dimostrata.

Se abbiamo $CA = CB$, allora C coincide con H. Dato che in questo caso D' è il simmetrico di E rispetto a IJ, allora F è il simmetrico di G rispetto a IJ e quindi $CF = CG$.

Se invece abbiamo $CA > CB$, allora mostriamo che $CF > HF > HG > CG$, La prima e l'ultima disuguaglianza sono evidenti. Sia D'' l'intersezione fra la retta DH e Γ diversa da D, cosicché D'' è il simmetrico di D' rispetto alla retta IJ; detta F' l'intersezione fra la retta JD'' e la retta AB, F' è il simmetrico di F rispetto ad H, dunque $HF = HF'$. Ora, supponendo che $CA > CB$, ovvero che C sia interno al segmento HB, ne segue che E faccia parte dell'arco BD'' di Γ che non contiene J. Ma allora il triangolo HJG è contenuto nel triangolo HJF', e dunque $HG < HF' = HF$. Similmente, se abbiamo $CA < CB$, allora otteniamo $CF < CG$.

6. Ada e Charles fanno un gioco. All'inizio un numero intero $n > 1$ è scritto sulla lavagna. A turno, Ada e Charles cancellano il numero k che trovano sulla lavagna e lo rimpiazzano
1 – o con un divisore positivo di k diverso da 1 e da k stesso
2 – oppure con $k + 1$.
Inizialmente ciascuno dei giocatori possiede mille punti. Quando un giocatore gioca la mossa 1, guadagna un punto; quando gioca la mossa 2, perde un punto. Il gioco ha termine quando uno dei giocatori giunge ad avere zero punti, e questo giocatore ha perso. Ada gioca per prima. Per quali valori di n Charles ha una strategia vincente?

Soluzione: I numeri a partire dai quali Charles vince sono tutti i numeri primi eccetto 2, 7, e 13, più i numeri seguenti: 8, 14, 26, 49, 91, 169.

Perché?

Innanzitutto dimostriamo che una partita non può protrarsi indefinitamente. La somma del numero sulla lavagna più i due punteggi dei due giocatori non può mai aumentare. Supponiamo che questa somma, inizialmente, sia S. Allora non è possibile che vengano giocate consecutivamente, in nessun momento della partita, S mosse di tipo 2, perché questa operazione porterebbe il numero sulla lavagna, e quindi la somma, a superare il valore iniziale S. Ne consegue che ogni S mosse giocate, almeno una è di tipo 1. Ogni mossa di tipo 1, però, provoca una diminuzione netta della somma. Quindi dopo non più di S mosse di tipo 1 la somma del numero sulla lavagna e dei punteggi dovrebbe essersi ridotta a zero, cosa che non può avvenire. La partita non può quindi durare più di S^2 mosse. Un corollario di questa osservazione è che una strategia che permetta di non perdere, automaticamente, è una strategia vincente.

Chiamiamo P (perdenti) l'insieme dei numeri sopra detti, e V (vincenti) l'insieme complementare. Descriviamo una strategia che permette ad Ada di vincere se il numero di partenza appartiene all'insieme V. L'idea della strategia è di giocare una mossa che sostituisca il numero in V con un numero in P. È facile verificare che da un numero dell'insieme P non è possibile raggiungere tramite una sola mossa un altro numero in P. Charles sarà quindi costretto a sostituire il numero in P prodotto da Ada con un nuovo numero dell'insieme V. A partire dal quale Ada potrà applicare nuovamente la sua strategia. Perché questa idea funzioni bisogna controllare che da ogni numero nell'insieme V sia possibile raggiungere un numero dell'insieme P, e che nel corso della partita Ada non possa perdere tutti i mille punti.

Sia n un numero appartenente all'insieme V, a partire da n Ada può raggiungere un numero dell'insieme P scegliendo la propria mossa secondo lo schema seguente:
a – Se n è divisibile per un fattore primo diverso da 2, 7, e 13, allora Ada raggiunge quel fattore, che è in P.
b – Se n è 2, 7, o 13, allora Ada gioca la mossa 2 e ottiene 3, 8, o 14 rispettivamente.
c – Se n è divisibile per un prodotto di due di questi fattori allora Ada raggiunge 14, 26, o 91.
d – L'unico caso rimanente è che n sia una potenza di 2, di 7, o di 13: in questo caso Ada raggiunge 8, 49, o 169, a meno che n non sia 4.
e – Se n è 4, allora Ada gioca la mossa 2 e ottiene 5.
A meno dei casi b ed e, le mosse di Ada sono di tipo 1, e quindi le danno un guadagno di punti. Si tratta quindi di analizzare cosa capita quando Ada si trova a giocare su uno dei numeri 2, 4, 7, e 13: chiaramente, quando questo capita per la prima volta, Ada possiede almeno mille punti. Studiamo prima il 4. In questo caso Ada gioca, secondo il nostro schema, il numero 5, sacrificando un punto, Charles è costretto a giocare 6, Ada gioca 3, riprendendo il punto sacrificato, Charles deve giocare 4, e il ciclo si ripete fino al termine della partita. In questo modo il punteggio di Ada non scende mai di più di un punto sotto il suo punteggio iniziale, Charles quindi perde necessariamente. Se il numero è 2, Ada gioca 3, perdendo un punto, e Charles è costretto a giocare 4, quindi, di conseguenza, a perdere. Se il numero è 7 Ada gioca 8, da cui Charles può scegliere di giocare 2 o 4, e perdere, oppure di giocare 9, dal quale Ada gioca 3, Charles 4, obbligato, e perde. Nel caso del 13 Ada gioca 14, Charles può scegliere fra 2 e 7, perdenti, oppure 15, dal quale Ada gioca 3 e, come prima, Charles perde.

Supponiamo ora che Ada inizi a giocare da un numero dell'insieme P, allora sarà costretta a giocare una mossa che produce un numero dell'insieme V, a partire dal quale Charles potrà vincere usando la medesima strategia che abbiamo descritto per Ada nel paragrafo precedente.