XVII Gara Nazionale a Squadre

Semifinale A – 6 Maggio 2016

Don't Panic!

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [⋆].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Numeri di pagina

Le Schede Galattiche per Turisti sono il libro di problem-solving più venduto dell'universo, anche perché riportano in copertina la rassicurante scritta "Lavorare! Lavorare! Lavorare!". Esse hanno 420 pagine numerate da 1 a 420, alcune delle quali contengono teoria ed altre esercizi. La somma dei numeri di pagina delle pagine di esercizi, che chiameremo S, è tale che S^2 divide la somma dei numeri di pagina delle pagine contenenti teoria. Quali valori diversi può assumere S? *Rispondere indicando la somma di questi valori.*

2. [⋆] I problemi delle Schede

Le Schede Galattiche contengono semplici problemi come il seguente. Consideriamo tutti i numeri che in base 2016 hanno esattamente dieci cifre e si scrivono in tale base usando solo le cifre zero e uno. Quanti di questi numeri sono multipli di cento? *Con 'cento', si intende il numero 100 in base dieci.*

3. Svincolo complicato

La casa di Arthur Dehn sta per essere distrutta per fare posto ad uno svincolo! Esso ha la forma di un quadrato $ABCD$ di lato 1500 in cui è inscritta una circonferenza Γ. Dal punto E del lato AB tale che $AE = 750\sqrt{2}$ parte una strada rettilinea (non sovrapposta ad AB) tangente a Γ, che interseca in X la retta CD. Quanto misura EX?

4. [⋆] Autostop in due passaggi

Anche la Terra sta per essere distrutta per fare posto a uno svincolo iperspaziale. Square Perfect ha escogitato un piano per salvarsi insieme ad Arthur. Essi dovranno teletrasportarsi su una nave Bogon, attendere almeno mezz'ora su di essa che il loro dispositivo di teletrasporto si ricarichi, e poi potranno trasferirsi con il dispositivo su un'altra nave spaziale che dovrebbe incrociare la nave Bogon 11 ore più tardi rispetto all'ora in cui è previsto il loro arrivo (il dispositivo di teletrasporto funziona solo quando le due navi sono vicine). In realtà, purtroppo, nulla assicura che le due navi saranno in orario: ognuna di esse, indipendentemente dall'altra, ha $\frac{1}{2}$ di probabilità di arrivare in orario, $\frac{1}{4}$ di avere un'ora di ritardo, $\frac{1}{8}$ di probabilità di averne due, $\frac{1}{16}$ di averne tre, e così via. Qual è la probabilità che i nostri due eroi riescano a teletrasportarsi due volte come da programma? *Rispondere indicando la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

5. Geometria Bogon

I Bogon hanno scoperto i due autostoppisti sulla loro nave! Ora il sovrintendente Krylov-Bogonlyubov li ha costretti a risolvere un problema della terribile Geometria Bogon, la seconda peggiore di tutto l'universo. Hanno di fronte un triangolo ABC con $AB = 7623$ e $BC = 8000$. Detto M il punto medio di BC, sono stati costretti a scegliere punti D, E sui segmenti AC, AB rispettivamente, in modo che $ABMD$ e $ACME$ siano ciclici. Per liberarsi, devono trovare il massimo valore di AC tale che $BCDE$ sia ciclico. Qual è questo valore?

6. [⋆] Pari o dispari?

Arthur e Square sono arrivati sulla Sezione D'Oro, la nave del presidente galattico Jacob Googolplex, uno strano alieno a due teste. Esse amano fare tra loro questo gioco. Scelto un intero positivo n, la prima testa elenca tutti i possibili sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, n\}$, urlando ad uno ad uno i numeri presenti in ognuno di essi. Per esempio, se $n = 2$, essa urla "Uno! Due! Uno! Due!", perché i sottoinsiemi sono $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$. La seconda testa lo ferma mentre sta urlando uno di questi numeri (scegliendo a caso tra tutti gli elementi della sequenza con la stessa probabilità), e vince se esso proviene da un sottoinsieme la cui somma degli elementi è pari. Detta p_n la sua probabilità di vittoria,

calcolare $128(p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{35})$.

7. La specie più intelligente

Gli umani non sono che la terza specie più intelligente del pianeta Terra, dopo i delfini e i topi. Difatti, data una successione tale che $a_0=1$, $a_1=2$, e $a_n=a_{n-1}+12a_{n-2}$ per ogni $n\geq 2$, i topi sanno calcolare immediatamente quanto vale $a_{2016}+3a_{2015}$. Gli umani invece possono al massimo determinare le ultime tre cifre di questo numero. Quali sono queste ultime tre cifre?

8. L'anno fuggente

Arthur ha già incontrato ad una festa Trillion, la nuova fiamma del presidente Jacob. Lì avevano fatto questa conversazione: "Pensa, è appena finito il 2015 e non mi ero accorta che esso ha 13 e 31 come fattori primi. Non capita spesso che un anno abbia due fattori primi che si scrivono in base 10 con le cifre ab e ba, con $a\neq b$. Non dovremmo perderci eventi come questi!". Per quanti altri anni sarà vera questa proprietà tra oggi e l'anno 3000?

9. [⋆] Il robot depresso

"Fai questo, fai quello... Su questa nave mi danno solo compiti ridicoli come dimostrare che 2243 è un numero primo" pensava tra sé e sé Artin, il robot della Sezione D'Oro. "Un cervello bionico come il mio può calcolare immediatamente anche quali sono i cinque numeri interi positivi $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_5$ minori di 2243 tali che $\alpha_i^5+2016\alpha_i+2016$ è multiplo di 2243 per ogni i. E so anche dire quanto fa il resto di $\alpha_1^4+\alpha_2^4+\cdots+\alpha_5^4$ nella divisione per 2243. Ma nessuno me lo chiede mai!" Sapreste dire anche voi quanto vale questo resto?

10. [⋆] Burocrazia Bogon

I Bogon hanno catturato Trillion! Arthur può liberarla con un ordine presidenziale di rilascio firmato da Jacob, ma prima deve sottostare a un'altra sessione di geometria Bogon. Sia ABC un triangolo di ortocentro H con $AB=84$, $AC=32\sqrt{3}$ e $\widehat{BAC}=60°$. Siano D un punto sul segmento AH tale che $7AD=AH$, E un punto sul segmento BH tale che $7BE=BH$, F un punto sul segmento CH tale che $7CF=CH$. Quanto vale $AB\cdot CF+BC\cdot AD+AC\cdot BE$?

11. La burocrazia non finisce mai

Dopo aver superato il primo ufficio Bogon, Jacob deve visitarne altri trenta, numerati da 2 a 31. Per ogni k, l'ufficio recante il numero k ha una probabilità $\frac{1}{k^2}$, indipendentemente dagli altri, di rifiutare l'ordine presidenziale. Qual è la probabilità che nessuno dei trenta uffici rimanenti rifiuti il modulo? *Rispondere indicando la somma di numeratore e denominatore ridotti ai minimi termini.*

12. Le coordinate di Mathratea

Arthur sta cercando di scoprire le coordinate del pianeta Mathratea decifrando i numeri in un'antica iscrizione. È riuscito a scoprire questa somma tra numeri scritti in base 10, scritta in un antico sistema in cui ogni simbolo rappresenta una cifra diversa (e i numeri non possono cominciare con la cifra 0): $\heartsuit\spadesuit+\diamondsuit\heartsuit\spadesuit+\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit=\clubsuit\heartsuit\spadesuit\spadesuit$. Essa è preziosissima per decifrare la loro scrittura, visto che non sono molti i valori che può assumere il risultato $\clubsuit\heartsuit\spadesuit\spadesuit$. Calcolate la quantità che si ottiene dividendo per dieci la somma di tutti suoi possibili valori.

13. Improbabilità crescente

Jacob ha attivato il motore a improbabilità crescente, un dispositivo sperimentale installato per la prima volta nella Sezione D'Oro. La nave prosegue in questo modo: dapprima ha una probabilità 7/10 di muoversi per un miglio galattico (altrimenti sta ferma), poi una probabilità 6/10 di fare due miglia, poi 5/10 di fare tre miglia, 4/10 di farne quattro, e infine 3/10 di farne cinque. Qual è la probabilità che l'astronave percorra 10 o più miglia galattiche? *Rispondere indicando le prime quattro cifre decimali di questa probabilità.*

14. [⋆] Il povero capodoglio

Il motore a improbabilità crescente ha portato i nostri eroi su Mathratea, ma nel frattempo ha creato un vaso di fiori e un capodoglio in caduta libera a diversi chilometri dalla superficie del pianeta. Che evento improbabile! Il povero cetaceo, mentre precipitava, ebbe appena il tempo di inventare questo problema. Sia ABC un triangolo e siano D e E rispettivamente dei punti su AB e AC tali che $\overline{AD}=\frac{1}{5}\overline{AB}$ e $\overline{AE}=\frac{1}{3}\overline{AC}$. Detta r la parallela a BC passante per A, siano F l'intersezione tra r e CD, G l'intersezione tra r e BE e P l'intersezione tra CD e BE. Sapendo che $FP=35$, $PG=100$ e $GF=117$, determinare l'area di $BCGF$.

15. Un fiordino

Su Mathratea il costruttore di mondi, Schwarzibartfast, sta costruendo una copia esatta del pianeta Terra, completa fino all'ultimo fiordo. Inizialmente voleva costruire un fiordo per ogni possibile polinomio monico a coefficienti reali di grado 3 tale che $p(1)=1$, $p(2)=2$ e $p(3)$ è un intero. Rendendosi conto che questi sono infiniti, ha deciso di limitarsi a quelli in cui tutti i coefficienti hanno valore assoluto minore o uguale a 5600. Quanti valori diversi può assumere $p(3)$?

16. L'ultima risposta

Dopo lunghi anni, il computer costruito dai Mathrateani è riuscito a calcolare la risposta alla Domanda (qualunque essa sia). Essa è pari alla quantità $-1^3-2^3+3^3+4^3-\cdots+15^3+16^3$, in cui i segni di fronte ai cubi sono alternativamente due meno e due più. Sfortunatamente, esso è stato distrutto prima di completare l'ultimo passo, cioè calcolare il valore di questa somma. Sapreste completare questo calcolo?

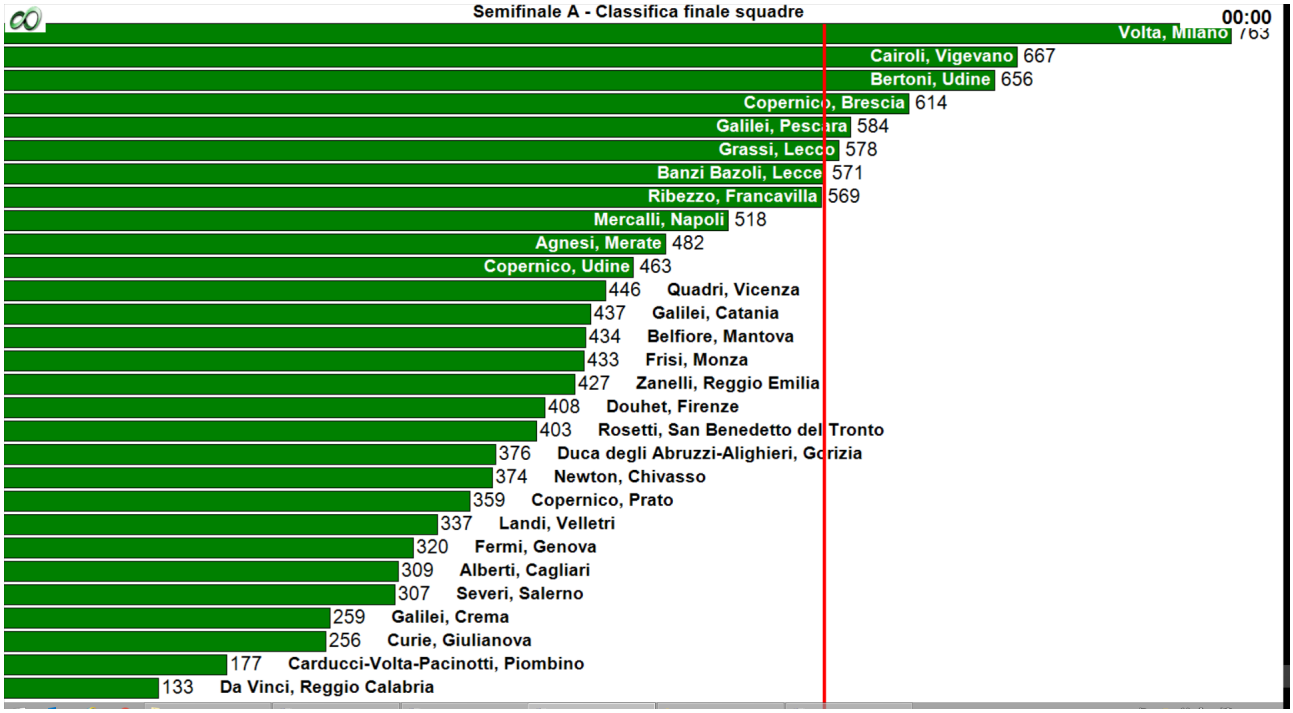
Unione Matematica Italiana

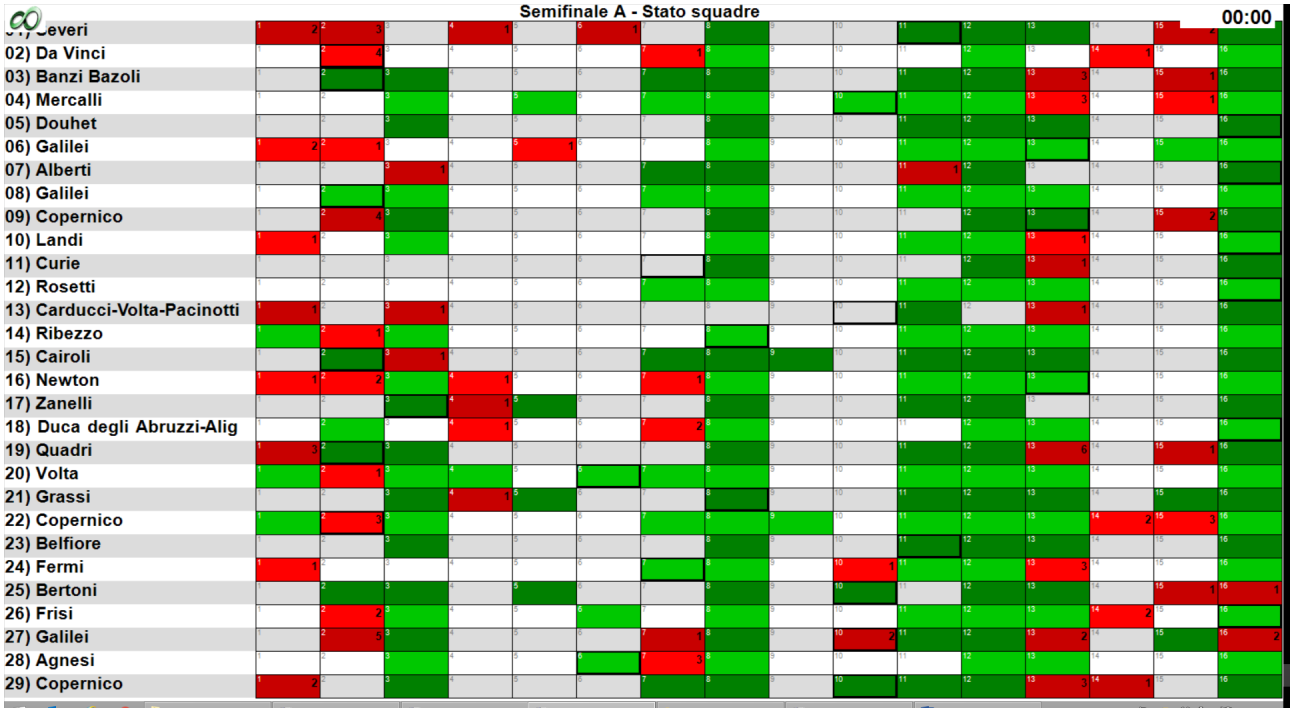
XVII Gara Nazionale a Squadre

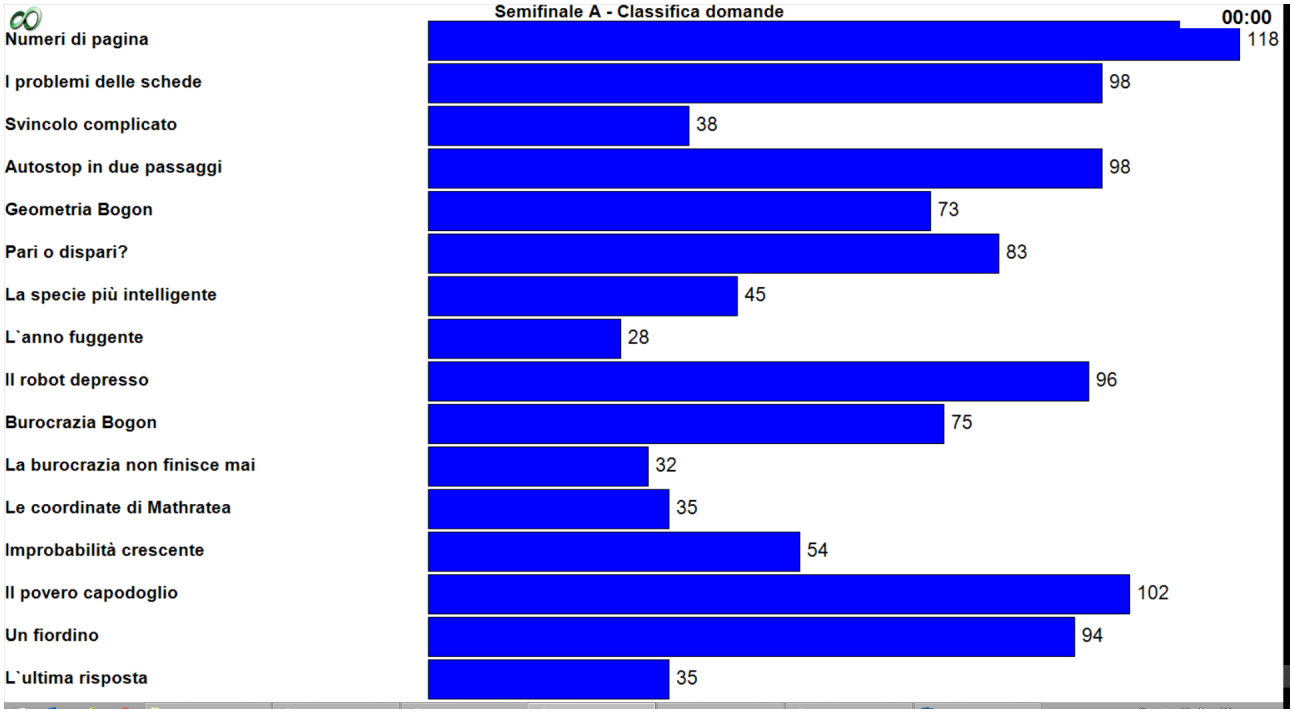
Semifinale A – Soluzioni – 6 Maggio 2016

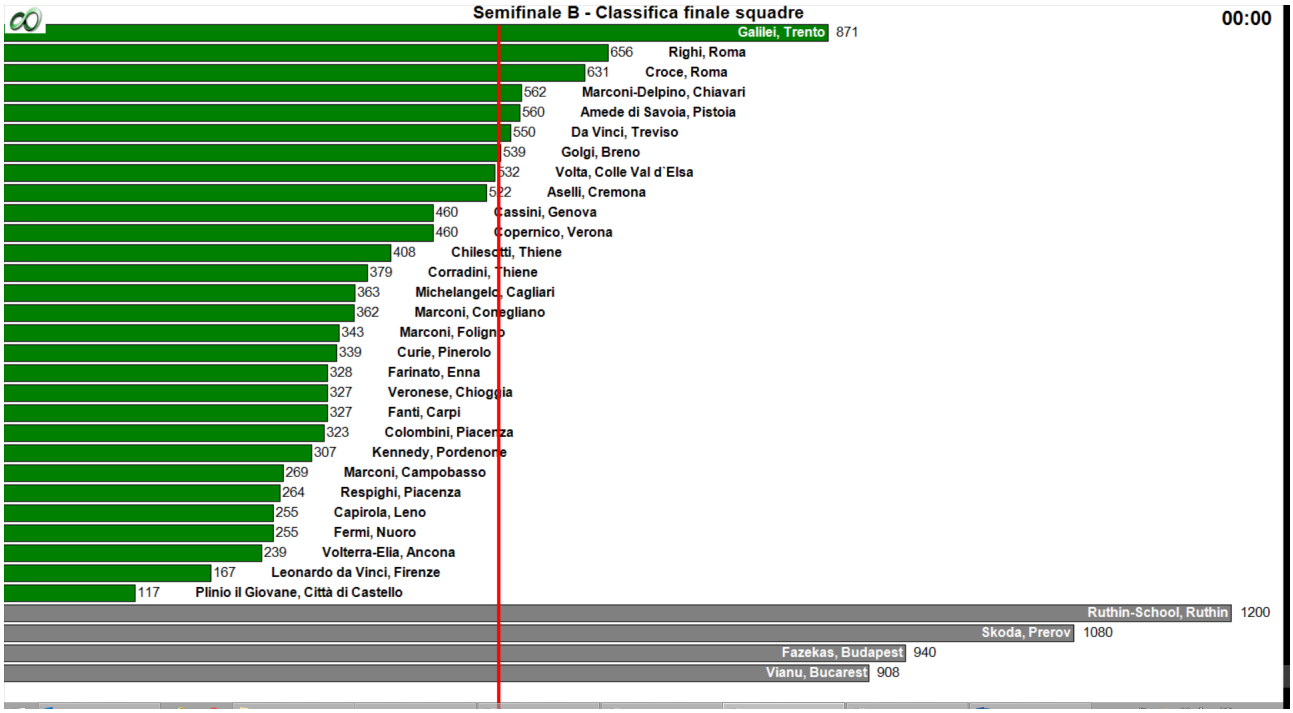
Don't Panic!

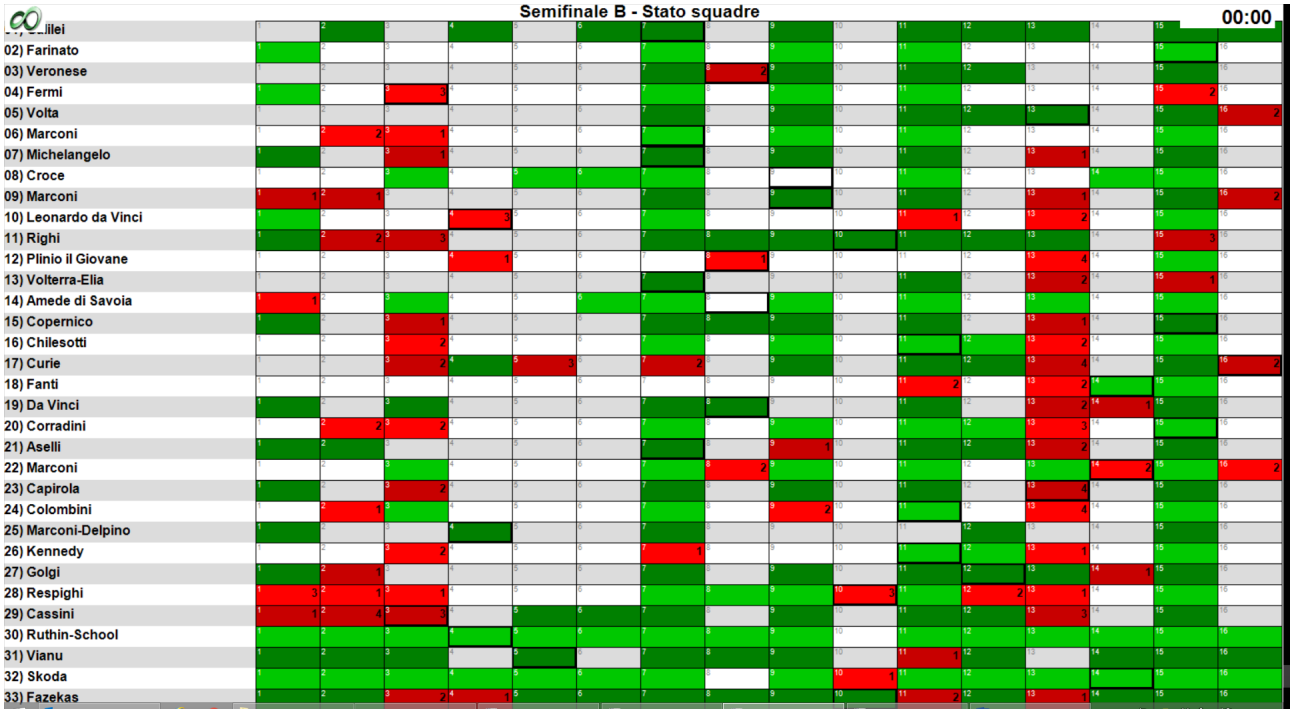
Nr.	Problema	Soluzione
1	Numeri di pagina	0240
2	[⋆]I problemi delle Schede	0014
3	Svincolo complicato	2121
4	[⋆]Autostop in due passaggi	6143
5	Geometria Bogon	7623
6	[⋆]Pari o dispari?	2144
7	La specie più intelligente	0120
8	L'anno fuggente	0004
9	[⋆]Il robot depresso	0908
10	[⋆]Burocrazia Bogon	1152
11	La burocrazia non finisce mai	0047
12	Le coordinate di Mathratea	3413
13	Improbabilità crescente	2256
14	[⋆]Il povero capodoglio	8918
15	Un fiordino	7467
16	L'ultima risposta	4456

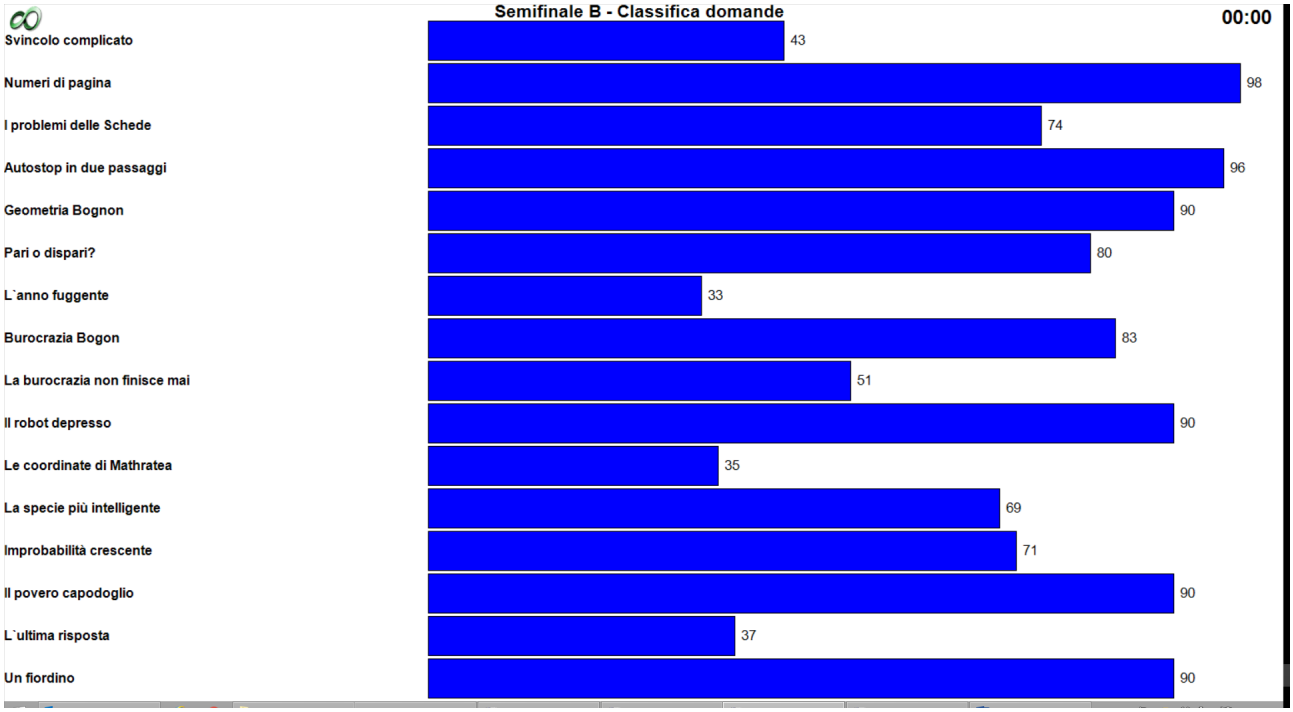

Semifinale A - Classifica finale squadre
00:00
Volta, Milano 763
Cairoli, Vigevano 667
Bertoni, Udine 656
Copernico, Brescia 614
Galilei, Pescara 584
Grassi, Lecco 578
Banzi Bazoli, Lecce 571
Ribezzo, Francavilla 569
Mercalli, Napoli 518
Agnesi, Merate 482
Copernico, Udine 463
446 Quadri, Vicenza
437 Galilei, Catania
434 Belfiore, Mantova
433 Frisi, Monza
427 Zanelli, Reggio Emilia
408 Douhet, Firenze
403 Rosetti, San Benedetto del Tronto
376 Duca degli Abruzzi-Alighieri, Gorizia
374 Newton, Chivasso
359 Copernico, Prato
337 Landi, Velletri
320 Fermi, Genova
309 Alberti, Cagliari
307 Severi, Salerno
259 Galilei, Crema
256 Curie, Giulianova
177 Carducci-Volta-Pacinotti, Piombino
133 Da Vinci, Reggio Calabria

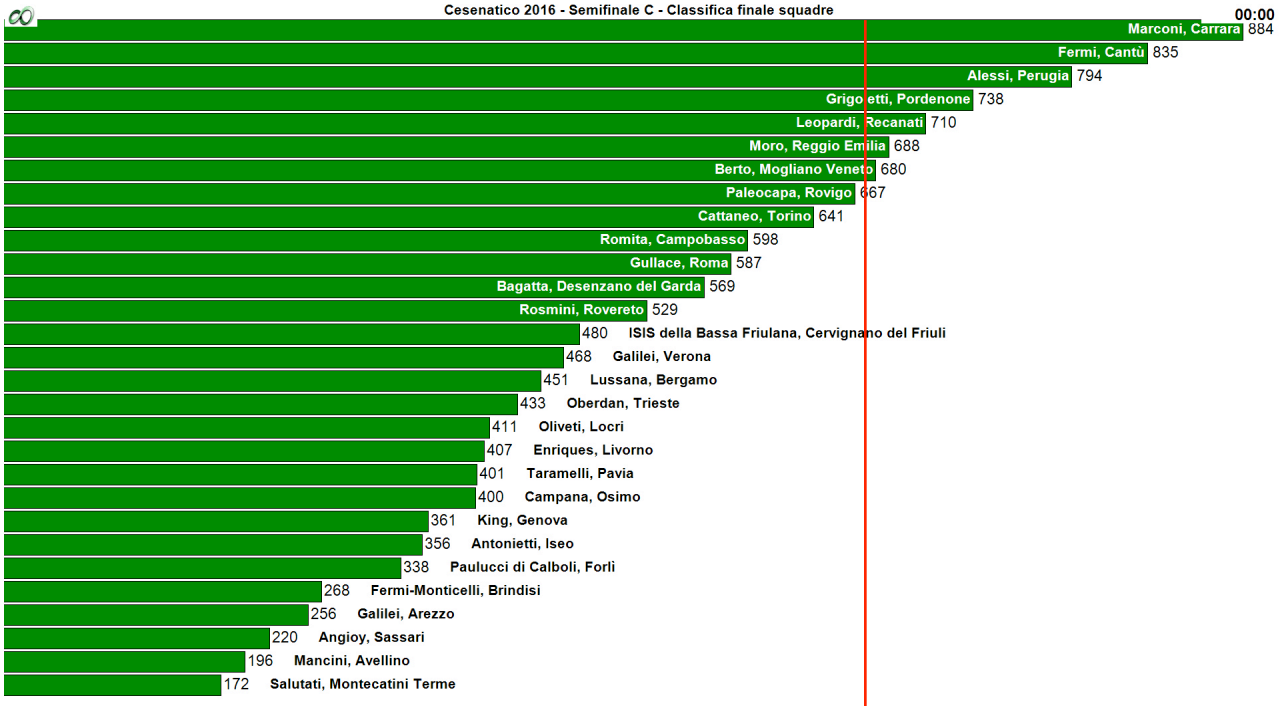

Semifinale A - Stato squadre
00:00
01) Severi
02) Da Vinci
03) Banzi Bazoli
04) Mercalli
05) Douhet
06) Galilei
07) Alberti
08) Galilei
09) Copernico
10) Landi
11) Curie
12) Rosetti
13) Carducci-Volta-Pacinotti
14) Ribezzo
15) Cairoli
16) Newton
17) Zanelli
18) Duca degli Abruzzi-Alig
19) Quadri
20) Volta
21) Grassi
22) Copernico
23) Belfiore
24) Fermi
25) Bertoni
26) Frisi
27) Galilei
28) Agnesi
29) Copernico

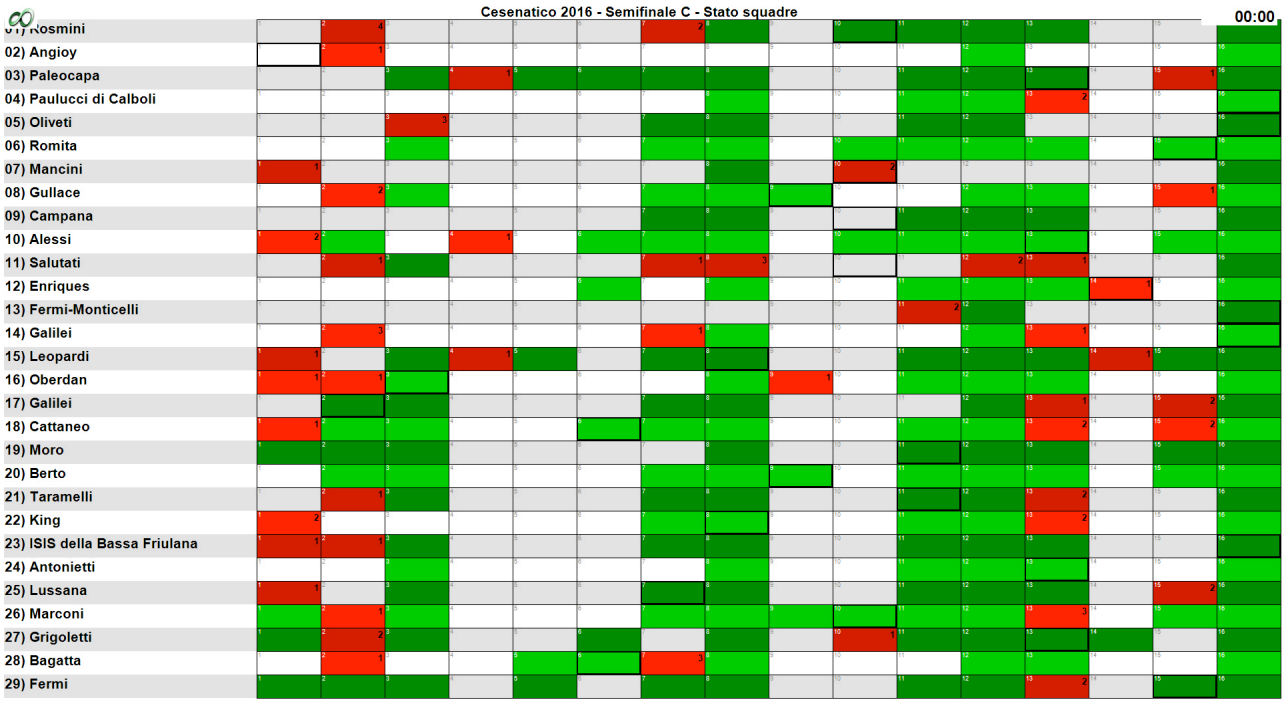

Semifinale A - Classifica domande
00:00
Numeri di pagina 118
I problemi delle schede 98
Svincolo complicato 38
Autostop in due passaggi 98
Geometria Bogon 73
Pari o dispari? 83
La specie più intelligente 45
L`anno fuggente 28
Il robot depresso 96
Burocrazia Bogon 75
La burocrazia non finisce mai 32
Le coordinate di Mathratea 35
Improbabilità crescente 54
Il povero capodoglio 102
Un fiordino 94
L`ultima risposta 35

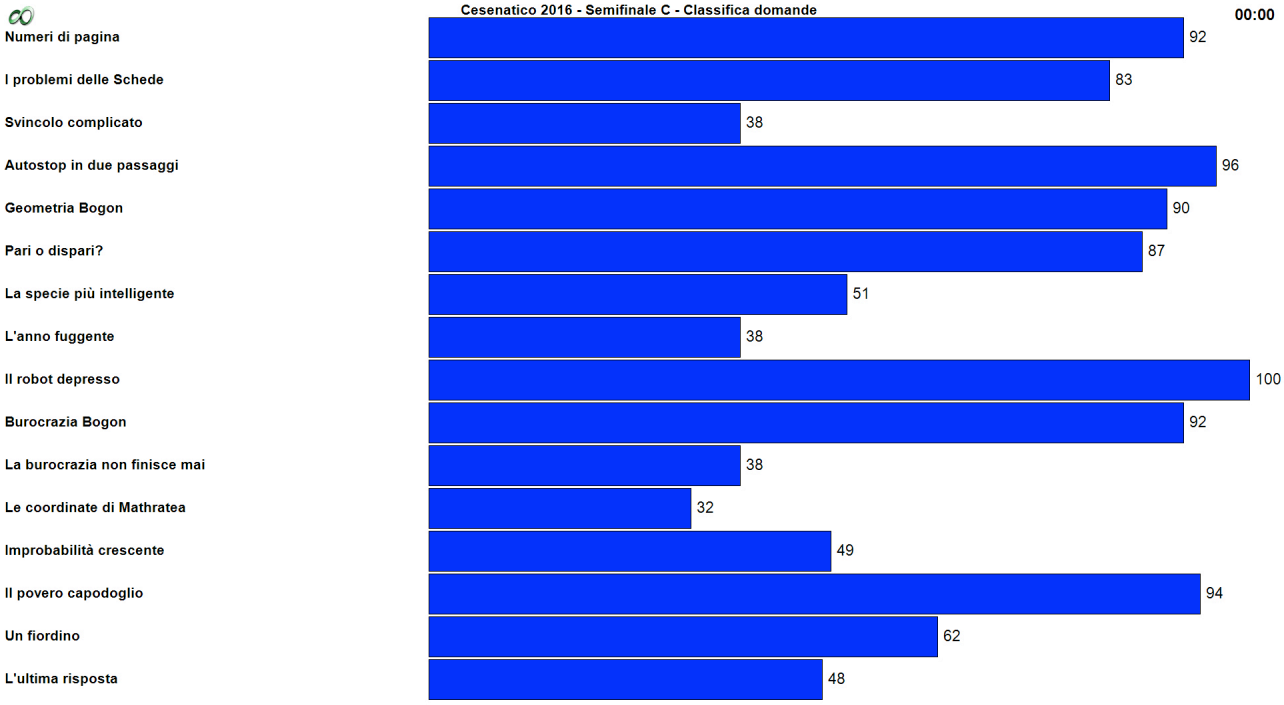

Semifinale B - Classifica finale squadre
00:00
Galilei, Trento 871
656 Righi, Roma
631 Croce, Roma
562 Marconi-Delpino, Chiavari
560 Amede di Savoia, Pistoia
550 Da Vinci, Treviso
539 Golgi, Breno
532 Volta, Colle Val d`Elsa
522 Aselli, Cremona
460 Cassini, Genova
460 Copernico, Verona
408 Chilesotti, Thiene
379 Corradini, Thiene
363 Michelangelo, Cagliari
362 Marconi, Conegliano
343 Marconi, Foligno
339 Curie, Pinerolo
328 Farinato, Enna
327 Veronese, Chioggia
327 Fanti, Carpi
323 Colombini, Piacenza
307 Kennedy, Pordenone
269 Marconi, Campobasso
264 Respighi, Piacenza
255 Capirola, Leno
255 Fermi, Nuoro
239 Volterra-Elia, Ancona
167 Leonardo da Vinci, Firenze
117 Plinio il Giovane, Città di Castello
Ruthin-School, Ruthin 1200
Skoda, Prerov 1080
Fazekas, Budapest 940
Vianu, Bucarest 908

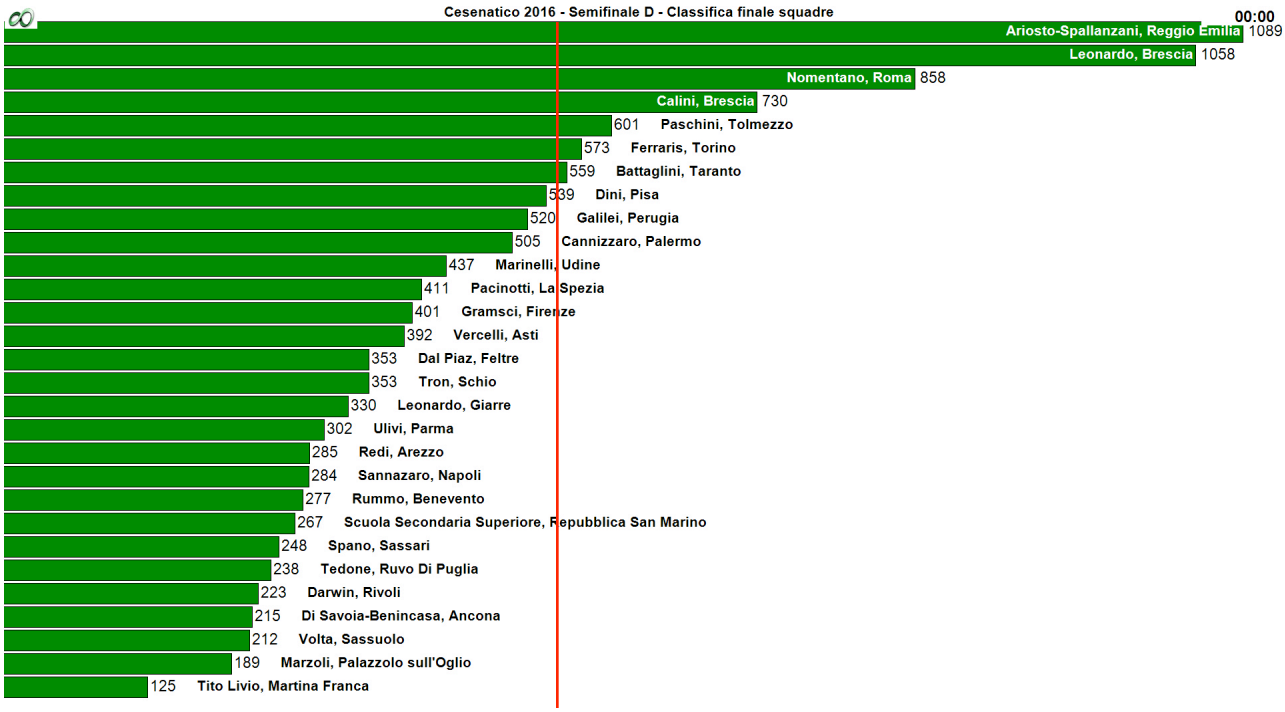

Semifinale B - Stato squadre
00:00
01) Galilei
02) Farinato
03) Veronese
04) Fermi
05) Volta
06) Marconi
07) Michelangelo
08) Croce
09) Marconi
10) Leonardo da Vinci
11) Righi
12) Plinio il Giovane
13) Volterra-Elia
14) Amede di Savoia
15) Copernico
16) Chilesotti
17) Curie
18) Fanti
19) Da Vinci
20) Corradini
21) Aselli
22) Marconi
23) Capirola
24) Colombini
25) Marconi-Delpino
26) Kennedy
27) Golgi
28) Respighi
29) Cassini
30) Ruthin-School
31) Vianu
32) Skoda
33) Fazekas

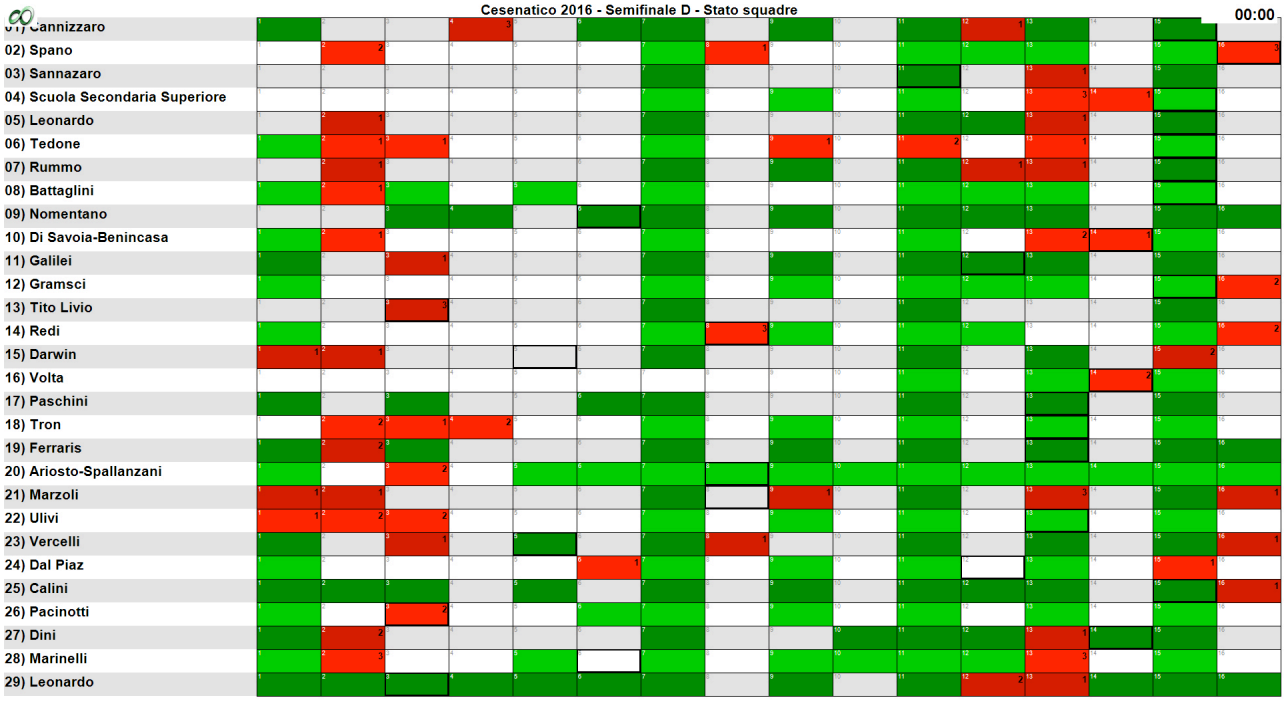

Semifinale B - Classifica domande
00:00
Svincolo complicato 43
Numeri di pagina 98
I problemi delle Schede 74
Autostop in due passaggi 96
Geometria Bognon 90
Pari o dispari? 80
L`anno fuggente 33
Burocrazia Bogon 83
La burocrazia non finisce mai 51
Il robot depresso 90
Le coordinate di Mathratea 35
La specie più intelligente 69
Improbabilità crescente 71
Il povero capodoglio 90
L`ultima risposta 37
Un fiordino 90

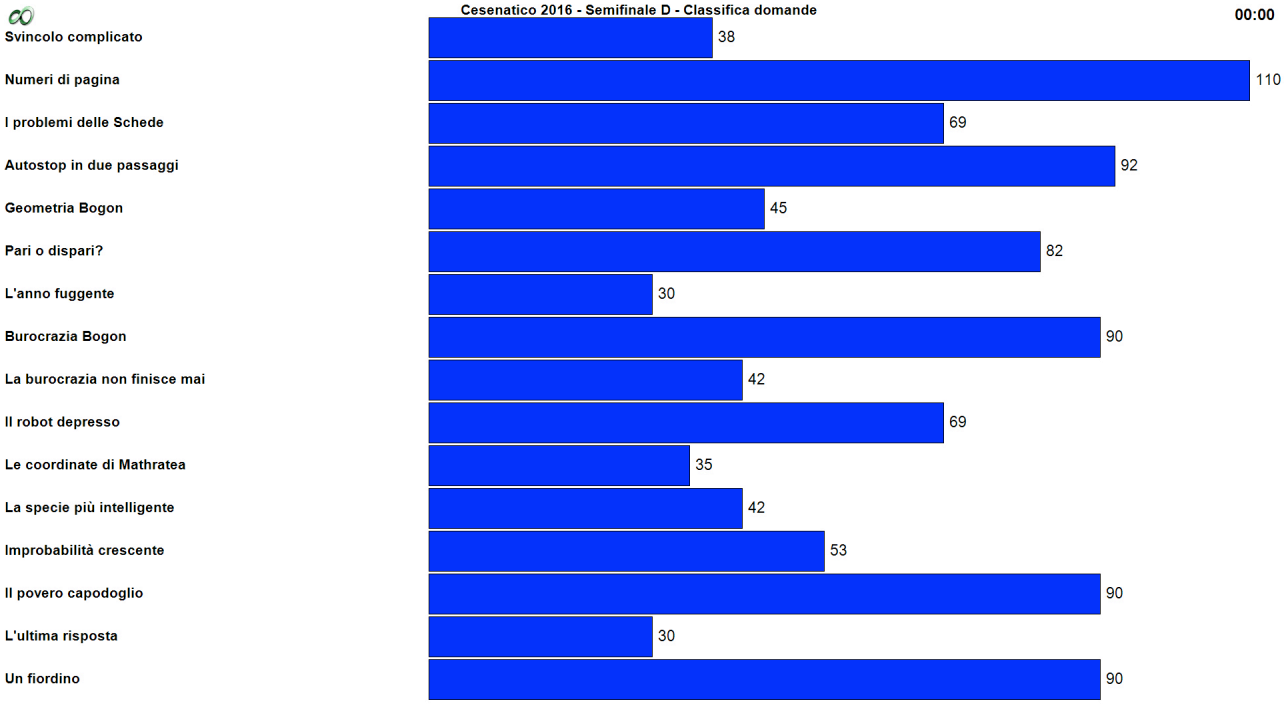

Cesenatico 2016 - Semifinale C - Classifica finale squadre
00:00
Marconi, Carrara 884
Fermi, Cantù 835
Alessi, Perugia 794
Grigoletti, Pordenone 738
Leopardi, Recanati 710
Moro, Reggio Emilia 688
Berto, Mogliano Veneto 680
Paleocapa, Rovigo 667
Cattaneo, Torino 641
Romita, Campobasso 598
Gullace, Roma 587
Bagatta, Desenzano del Garda 569
Rosmini, Rovereto 529
480 ISIS della Bassa Friulana, Cervignano del Friuli
468 Galilei, Verona
451 Lussana, Bergamo
433 Oberdan, Trieste
411 Oliveti, Locri
407 Enriques, Livorno
401 Taramelli, Pavia
400 Campana, Osimo
361 King, Genova
356 Antonietti, Iseo
338 Paulucci di Calboli, Forlì
268 Fermi-Monticelli, Brindisi
256 Galilei, Arezzo
220 Angioy, Sassari
196 Mancini, Avellino
172 Salutati, Montecatini Terme


Cesenatico 2016 - Semifinale C - Stato squadre
00:00
01) Rosmini
02) Angioy
03) Paleocapa
04) Paulucci di Calboli
05) Oliveti
06) Romita
07) Mancini
08) Gullace
09) Campana
10) Alessi
11) Salutati
12) Enriques
13) Fermi-Monticelli
14) Galilei
15) Leopardi
16) Oberdan
17) Galilei
18) Cattaneo
19) Moro
20) Berto
21) Taramelli
22) King
23) ISIS della Bassa Friulana
24) Antonietti
25) Lussana
26) Marconi
27) Grigoletti
28) Bagatta
29) Fermi


Cesenatico 2016 - Semifinale C - Classifica domande
00:00
Numeri di pagina 92
I problemi delle Schede 83
Svincolo complicato 38
Autostop in due passaggi 96
Geometria Bogon 90
Pari o dispari? 87
La specie più intelligente 51
L'anno fuggente 38
Il robot depresso 100
Burocrazia Bogon 92
La burocrazia non finisce mai 38
Le coordinate di Mathratea 32
Improbabilità crescente 49
Il povero capodoglio 94
Un fiordino 62
L'ultima risposta 48


Cesenatico 2016 - Semifinale D - Classifica finale squadre
00:00
Ariosto-Spallanzani, Reggio Emilia 1089
Leonardo, Brescia 1058
Nomentano, Roma 858
Calini, Brescia 730
601 Paschini, Tolmezzo
573 Ferraris, Torino
559 Battaglini, Taranto
539 Dini, Pisa
520 Galilei, Perugia
505 Cannizzaro, Palermo
437 Marinelli, Udine
411 Pacinotti, La Spezia
401 Gramsci, Firenze
392 Vercelli, Asti
353 Dal Piaz, Feltre
353 Tron, Schio
330 Leonardo, Giarre
302 Ulivi, Parma
285 Redi, Arezzo
284 Sannazaro, Napoli
277 Rummo, Benevento
267 Scuola Secondaria Superiore, Repubblica San Marino
248 Spano, Sassari
238 Tedone, Ruvo Di Puglia
223 Darwin, Rivoli
215 Di Savoia-Benincasa, Ancona
212 Volta, Sassuolo
189 Marzoli, Palazzolo sull'Oglio
125 Tito Livio, Martina Franca


Cesenatico 2016 - Semifinale D - Stato squadre
00:00
01) Cannizzaro
02) Spano
03) Sannazaro
04) Scuola Secondaria Superiore
05) Leonardo
06) Tedone
07) Rummo
08) Battaglini
09) Nomentano
10) Di Savoia-Benincasa
11) Galilei
12) Gramsci
13) Tito Livio
14) Redi
15) Darwin
16) Volta
17) Paschini
18) Tron
19) Ferraris
20) Ariosto-Spallanzani
21) Marzoli
22) Ulivi
23) Vercelli
24) Dal Piaz
25) Calini
26) Pacinotti
27) Dini
28) Marinelli
29) Leonardo


Cesenatico 2016 - Semifinale D - Classifica domande
00:00
Svincolo complicato 38
Numeri di pagina 110
I problemi delle Schede 69
Autostop in due passaggi 92
Geometria Bogon 45
Pari o dispari? 82
L'anno fuggente 30
Burocrazia Bogon 90
La burocrazia non finisce mai 42
Il robot depresso 69
Le coordinate di Mathratea 35
La specie più intelligente 42
Improbabilità crescente 53
Il povero capodoglio 90
L'ultima risposta 30
Un fiordino 90

XVII Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – 7 Maggio 2016

Istruzioni Generali

- *Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra* 0000 *e* 9999.
- *Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.*
- *Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi* 0000.
- *Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di* 9999, *se ne indichino le ultime quattro cifre.*
- *I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella* [⋆].
- *Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:*

$\sqrt{2}$=1.4142 $\sqrt{3}$=1.7321 $\sqrt{5}$=2.2361 $\sqrt{7}$=2.6458 π=3.1416.

Scadenze importanti

- *10 minuti dall'inizio: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).*
- *30 minuti dall'inizio: termine per rivolgere domande sul testo.*
- *120 minuti dall'inizio: termine della gara.*

1. [⋆] Droidi ben sfondati

La Fondazione dei Mercanti utilizza droidi di classe ZFC a forma di prisma, con due pentagoni regolari $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ come basi (in modo che gli spigoli siano AA', BB', CC', DD' e EE'). L'ambasciatore Qui-Gob Binn viene attaccato a tradimento da una pattuglia di droidi durante una missione diplomatica su una nave della Fondazione. Nello scontro, uno dei droidi viene tagliato in due parti dalla riga laser di Qui-Gob Binn lungo un piano passante per A, B e D'. Determinare il volume del droide sapendo che il volume della più piccola di queste due parti è pari a 1000.

2. Grande festa su Naboole

Per celebrare la vittoria contro la Fondazione dei Mercanti, su Naboole è in corso una grande festa. I tavoli del banchetto hanno la forma di triangoli rettangoli con lati di lunghezza intera. Inoltre ogni tavolo ha almeno un cateto la cui lunghezza è un numero primo minore di 20. La regina Atiyala ha insistito affinché non ci fossero due tavoli con forme congruenti (su Naboole mettere due tavoli uguali è come non metterne nessuno). Quanto vale al massimo la somma delle aree dei tavoli presenti al banchetto? *Due triangoli si considerano congruenti se si possono sovrapporre l'uno all'altro tramite rotazioni, traslazioni e simmetrie.*

3. [⋆] Il pianeta scomparso

"All'interno del trapezio $ABCD$, il pianeta tu troverai". Il maestro Yoneda, parlando per inversioni, indica a Obi-Van Kampenobi l'ubicazione del pianeta Rudino. *"Il trapezio, isoscele è. Le basi AB e CD rispettivamente* 32 *e* 18, *lunghe sono. In un punto P tale che $\angle PAD = \angle PBA$ e $\angle PDA = \angle PCD$, il pianeta si trova."* Obi-Van scopre dal suo amico TEX che l'area del triangolo ABP è pari a 192. Quanto vale il prodotto delle lunghezze di PA e PC?

4. L'esercito di cloni

Il maestro Sisifo-Denis ha commissionato ai clonatori di Rudino la creazione di un esercito della Repubblica. Nel corso dell'n-esimo mese vengono prodotti x_n cloni. Il primo mese viene impiegato per analizzare il DNA di Rango Fett, quindi $x_1 = 0$. Dal mese successivo, la produzione rispetta le seguenti regole: $x_{4n} = x_{4n-1} + 2n - 1$; $x_{4n+1} = x_{4n} + 2n + 1$; $x_{4n+2} = x_{4n+1} + 2n$; $x_{4n+3} = x_{4n+2} + 2n + 2$ (con n intero). Quanti cloni sono stati prodotti complessivamente nei primi 100 mesi?

5. [⋆] Addestramento GeDi

Il giovane Banachin, allievo di Obi-Van, deve affinare diverse doti per poter diventare un Geometra Differenziale; una di queste consiste nel percepire i valori di certi polinomi usando la Forza. Per allenare il suo allievo, un giorno Obi-Van pensa a un polinomio $p(x)$ di grado 5 e chiede a Banachin di determinare $p(128)$. Il giovane PDE-wan non è ancora abbastanza abile da scoprirlo direttamente, ma riesce a percepire che $p(2^k) = \frac{1}{1-2^k}$ per $k = 1, 2, \ldots, 6$. Qual è la risposta alla domanda di Obi-Van?

6. Sudooku diabolico

Sul pianeta Geodesis, tra un piano malvagio e l'altro, il Conte Sudooku si diletta scrivendo i numeri di al più 10 cifre con la prima e l'ultima cifra diverse tra loro e da zero. Accanto a ogni numero m, egli scrive il numero n ottenuto da m scambiando di posto la prima e l'ultima cifra, e poi annota il massimo comune divisore d tra m ed n. Determinare il massimo valore possibile per d e sommarlo al numero delle sue cifre.

7. La sede del Consiglio

La Torre dell'Alto Consiglio, sul pianeta Coruscantor, è costruita su sei livelli. Quello più in basso ha la forma di un prisma retto la cui base è un ottagono regolare di lato 10, e la cui altezza è a sua volta lunga 10. I livelli successivi hanno anch'essi la forma di prismi retti, le cui basi sono (nell'ordine) ettagonale, esagonale, pentagonale, quadrata e triangolare. Rispetto al precedente, ogni livello ha altezza doppia e lati di base lunghi la metà. Inoltre gli assi dei diversi prismi coincidono. Quanto misura la superficie visibile della torre?

8. [⋆] La miniera separatista

Su Mustafausdorff, un pianeta vulcanico dove ogni coppia di punti è separata da due crateri, vi è un'intesa attività di estrazione di minerali. I droidi impiegati per la lavorazione sono divisi in due squadre, e ciascuno di essi ha assegnato un codice di protocollo che consiste in un numero intero positivo. All'i-esimo droide della prima squadra è assegnato il codice a_i, con $a_1 = a_2 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ per $n \geq 2$. All'i-esimo droide della seconda squadra è assegnato il codice b_i, con $b_1 = 1$ e $b_{n+1} = a_{n+1} + b_n$ per $n \geq 1$. A causa di alcuni malfunzionamenti, viene effettuato un controllo qualità sui droidi. Al 1792-esimo droide della prima squadra viene chiesto di sommare i codici di protocollo dei primi 1789 droidi della sua squadra, addizionare il proprio codice, e sottrarre dal risultato la somma dei codici dei primi 1789 droidi della seconda squadra. Quali sono le prime quattro cifre del numero così ottenuto?

9. Aiutami, Obi-Van!

"Aiutami, Obi-Van Kampenobi, sei la mia unica speranza: risolvi questo problema di geometria!". Il droide cilindrico quadridimensionale $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{D}^2$ continua la richiesta d'aiuto della principessa Liea trasmettendo i dati del problema: *"Sia ABC un triangolo, con $BAC = 40°$ e $ABC = 100°$. Sia D un punto qualsiasi sulla bisettrice uscente da A. Siano X, Y le proiezioni di D su AB, AC, rispettivamente. Siano poi E, F i punti di intersezione (distinti da B, C) rispettivamente della circonferenza circoscritta a ABD e della circonferenza circoscritta a ADC con la retta BC. Detta W la proiezione di E su AC e Z la proiezione di F su AB, calcolare il prodotto delle lunghezze dei segmenti XZ e YW, sapendo che il segmento DF misura* 114*"*.

10. Planimetrie crittografate

La principessa Liea, prima di essere imprigionata, ha salvato nella memoria del droide $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{D}^2$ tutti i dati sulla Morte Nera in 2016 diversi file. Il droide li ha numerati in base 2 da 1 a 2016 e li ha crittografati. La chiave di accesso è il numero di cifre 1 che compaiono in totale nella numerazione dei file. Che numero deve inserire l'Alleanza Ribelle per avere accesso ai dati sulla Morte Nera?

11. Geometria in nero

Il contrabbandiere Han Singleton nasconde nella sua nave, il Millennium Problem, delle casse di compassi laser da utilizzare durante la gara a squadre. Ciascuna cassa è etichettata con un numero multiplo di 3. Il pilota nota che per ognuno di questi numeri esiste una base b, con $2 \leq b \leq 100$, utilizzando la quale il numero risulta avere tutte le cifre da 1 a $b-1$ in ordine crescente da sinistra a destra. Un esempio è la cassa numero 27, perché 27 si scrive "123" in base 4. Quante sono al massimo le casse?

12. Una partita degenere

Per passare il tempo sul Millennium Problem, Han Singleton e il suo copilota Chewbashev spesso giocano a Dejenerik. Un giorno la scacchiera olografica 3×3 viene lasciata accesa nel mezzo di una partita, in una configurazione in cui vi sono esattamente quattro pezzi disposti sulle quattro caselle d'angolo. Ogni minuto ciascuno dei quattro pezzi salta casualmente su una delle caselle adiacenti (in orizzontale o in verticale, non in diagonale); tutte le caselle di destinazione consentite per un pezzo hanno la medesima probabilità di essere scelte. Dopo 2016 salti i pezzi si fermano. Sapendo che nessuna coppia di pezzi si è mai incontrata sulla medesima casella, determinare la probabilità che alla fine i pezzi occupino ancora i quattro angoli della scacchiera (eventualmente in un ordine diverso da quello iniziale). *Si risponda indicando la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

13. Terzo grado

Il temibile Mond Vander sta interrogando la principessa Liea per ottenere le coordinate della base ribelle segreta. Ella si fa infine sfuggire l'informazione cruciale: il numero del settore in cui si trova la base è dato dalla somma tra numeratore e denominatore della frazione $q(-4/3)/q(-2)$ (ridotta ai minimi termini). Per fortuna il polinomio $q(x)$ è complicato da costruire, e gli ufficiali dell'Impero stanno ancora cercando di calcolarlo. Per ottenerlo bisogna partire dal polinomio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 12$, chiamare a, b e c le sue radici reali, e considerare come polinomio $q(x)$ quello di terzo grado avente come radici $ab + a + b$, $bc + b + c$, $ca + c + a$ e tale che $q(2015) = 2016^{2017}$. Qual è il numero cercato dall'Impero?

14. Base ribelle a portata di tiro

Gli ufficiali dell'Impero hanno capito che la base ribelle segreta si trova su una delle 2016 lune di Yacobin (numerate da 1 a 2016). Alcune spie hanno rivelato informazioni cruciali riguardo al numero n corrispondente alla luna su cui si trova la base ribelle: la somma dei divisori positivi pari di n è uguale alla somma dei divisori positivi multipli di 5 di n, ed n ha almeno 13 divisori positivi pari. Quale luna deve essere distrutta dall'Impero?

15. Caccia in formazione

Una squadriglia di caccia LTE è formata da un certo numero di astronavi (maggiore di 1), che possono disporsi in diverse formazioni. Una formazione a n-agono consiste di una nave circondata da un certo numero di n-agoni concentrici. L'n-agono più interno è formato da n navi, il secondo da $2n$, il terzo da $3n$, e così via fino a quello più esterno. La squadriglia di cui fa parte Mond Vander può disporsi in formazione a pentagono e ad esagono senza che avanzino navi in nessuno dei due casi. Da quante astronavi è composta, al minimo?

16. Distruggere la Morte Nera!

Luke Randomwalker, a bordo del suo caccia, deve riuscire a distruggere la Morte Nera. Deve colpire un obiettivo posto nell'incentro di un triangolo acutangolo ABC formato da 3 torrette tali che $\angle BAC = 60°$ e $BC = 2016\sqrt{3}$ m. Luke si trova sullo stesso piano delle torrette e del bersaglio, alla distanza di 2016 m sia da B che da C e dalla parte opposta di A rispetto a BC. Quanto è distante in metri Luke dal suo obiettivo?

17. Salto nell'iperspazio

Han Singleton e Chewbashev devono effettuare il salto nell'iperspazio per seminare dei caccia imperiali all'inseguimento. Per farlo con sicurezza però devono completare un ultimo calcolo, che consiste nel trovare il valore della somma $1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 2016^{2016}$. Qual è l'ultima cifra di tale numero?

18. [⋆] A caccia del Millennium Problem

Il cacciatore di taglie Bobo Fett sta inseguendo l'ambita nave di Han Singleton, il Millennium Problem, per la quale l'Impero ha messo in palio un milione di Crediti Galattici. Sullo schermo del computer di bordo, l'ubicazione delle navi è individuata a partire da un quadrilatero $ABCD$ inscritto in una circonferenza. Il Millennium Problem si trova nel punto E, intersezione dei prolungamenti di AB e CD, mentre la nave di Bobo si trova nel punto F, intersezione dei prolungamenti di BC e AD. Il computer riporta le distanze delle due navi dal punto d'incontro P delle bisettrici degli angoli $\angle AEC$ e $\angle AFC$: $PF = 1612$ e $PE = 1209$. Qual è la distanza tra le due navi?

19. [⋆] Ardue da vedere, le proprietà di n sono

Sul paludoso pianeta di Dagoldbach, il maestro Yoneda sta addestrando Luke Randomwalker. Per affinarne la mente, Yoneda interroga Luke sulle proprietà di un certo intero positivo n. L'apprendista osserva che, per ogni numero di cinque cifre *abcde* multiplo di n (a, b, c, d, e rappresentano le cifre del numero ed a è diverso da zero), anche *eabcd*, *deabc*, *cdeab* e *bcdea* sono multipli di n. Quanto vale la somma di tutti gli $n < 1000$ che verificano questa condizione?

20. [⋆] Passeggiata aleatoria interplanetaria

Luke Randomwalker sta cercando un posto sicuro dove nascondersi, e per farlo viaggia in incognito a bordo di navi mercantili. Le navi scelte da Luke seguono rotte che collegano tra loro n pianeti. Tra di essi vi sono: Coruscantor, dove Luke si trova all'inizio; Banahch-Torsk, un ameno pianeta doppio dove Luke si ferma immediatamente (se ci passa); Taodana, sede del covo di Maz Karamata, dove ci sono così tante spie del Prim'Ordine che è certo che qualcuno lo riconosca e lo uccida. Da ogni pianeta (esclusi Taodana e Banahch-Torsk) partono rotte unidirezionali verso esattamente altri due pianeti, e da al massimo uno di questi due esiste una successione di rotte che consente di tornare al pianeta appena lasciato. Ogni volta che lascia un pianeta, Luke sceglie a caso tra le due rotte possibili (con uguale probabilità) e si ferma solamente se arriva su Banahch-Torsk oppure se viene ucciso su Taodana. Sapendo che la probabilità che arrivi sano e salvo su Banahch-Torsk è $1/2016$, quanto vale n come minimo?

21. Passatempi robotici

Un solitario molto diffuso tra i droidi funziona come segue. Innanzitutto bisogna scegliere un numero n, e salvare in memoria i seguenti numeri (nell'ordine): 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, …, $\frac{1}{n}$. Dopodiché si prosegue in questo modo, finché non rimane un solo numero: si eliminano i primi due numeri a e b presenti nella lista, e si salva in memoria in fondo alla lista il nuovo numero $\frac{ab}{(a+1)(b+1)-1}$. In un momento di svago il droide BB-∞ fa una partita al solitario, ottenendo $\frac{1}{229}$ come numero finale. Quanto vale il numero n scelto inizialmente?

22. Pronti a sparare

La stazione Starkilling è pronta a ridurre in mille pezzi la base della Resistenza su D'Haar. La procedura di fuoco è stata avviata con largo anticipo per evitare spiacevoli inconvenienti dell'ultimo minuto, come un attacco a sorpresa che sfrutti il punto debole della stazione. Al momento di dare l'ordine, tuttavia, il generale Hooke si rende conto che il codice di conferma era salvato sul computer distrutto da Maklo Rin in un momento d'ira. Per fortuna si ricorda come calcolarlo: tale codice è pari al minimo grado possibile di un polinomio $q(x)$ per cui esista un polinomio $p(x)$ che soddisfi la relazione $p(p(x)) = (p(x))^{40} + x^{80} + q(x)$; entrambi i polinomi devono essere non nulli e avere coefficienti reali. Qual è il codice di conferma?

23. Cercando Luke

Il cavaliere GeDi Luke Randomwalker ha cominciato a viaggiare a caso di pianeta in pianeta, lasciando pochissime informazioni sul suo percorso. Fortunatamente, i pianeti su cui si muove si trovano tutti sullo stesso piano. La giovane Ramsrey vuole rintracciarlo per restituirgli la sua riga laser, e riesce a scoprire che Luke al momento è all'interno di un rombo $ABCD$ di area 3222180 con $\angle BAC = 30°$. Ella trova inoltre un modo di restringere il campo: prende gli assi relativi ai lati del rombo e chiama A', B', C', D' le intersezioni a due a due degli assi relativi alle coppie di lati consecutivi. In questo modo ottiene un quadrilatero più piccolo. Ramsrey continua a ripetere il procedimento finché ottiene quadrilateri di area intera. Sa per certo che Luke si trova entro i confini del più piccolo di questi. Quanto è grande l'area che Ramsrey deve esplorare?

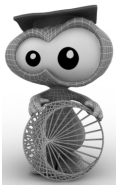
24. Non è una luna, quella...

Gl'ingegneri del Prim'Ordine (usando la leggendaria *logica del Prim'Ordine*) stanno studiando una forma alternativa per la prossima Morte Nera. Per eliminare i punti deboli tipici delle stazioni spaziali sferiche, il nuovo progetto prevede una struttura data da un solido le cui facce siano triangoli equilateri e pentagoni regolari. Inoltre in ogni vertice si incontrano esattamente un pentagono e quattro triangoli. Uno degl'ingegneri esclama: "Che strano! Il prodotto tra il numero di pentagoni e quello di triangoli è uguale alla combinazione della mia valigia". Quanto vale questa combinazione?

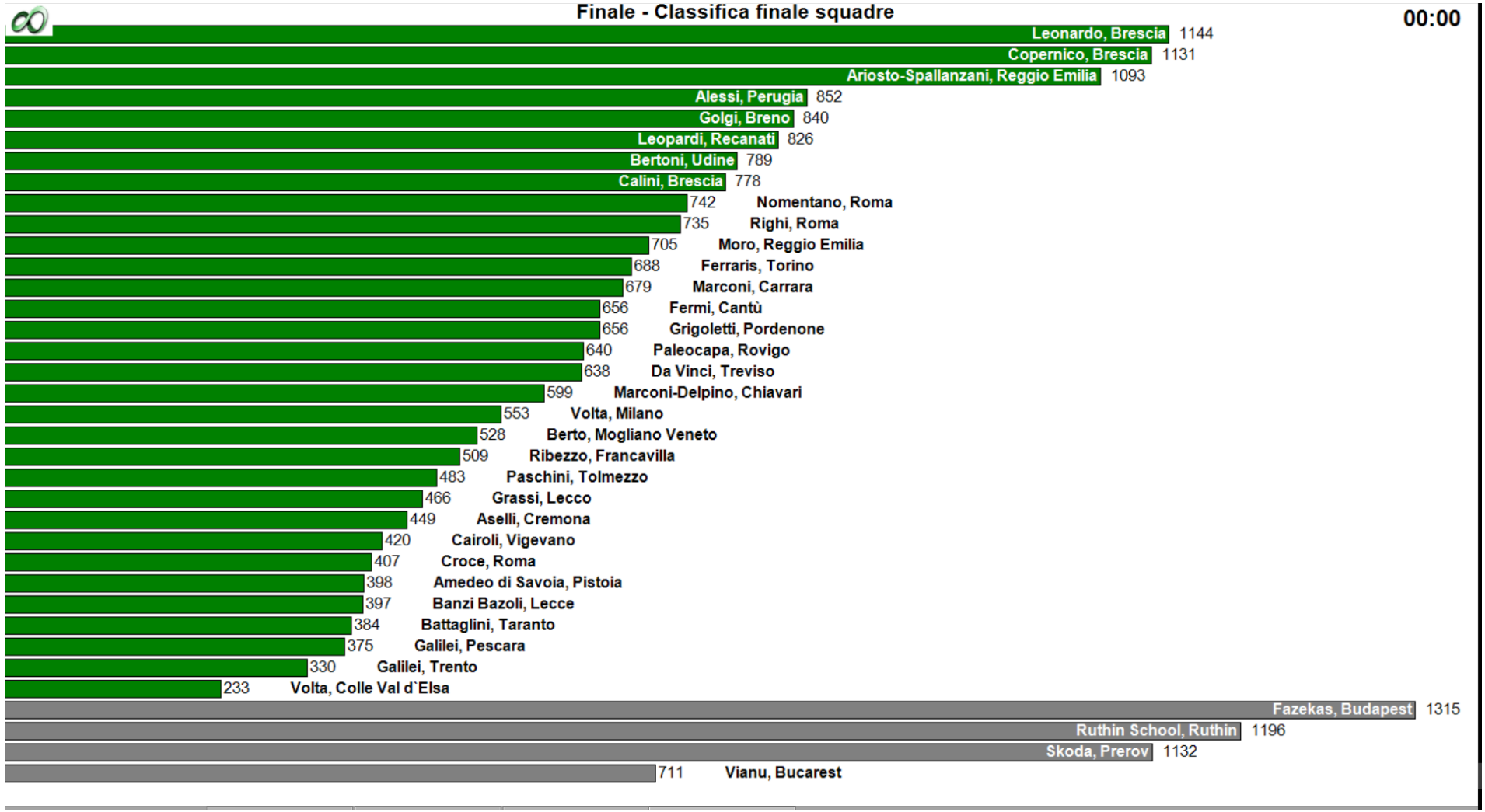
Unione Matematica Italiana

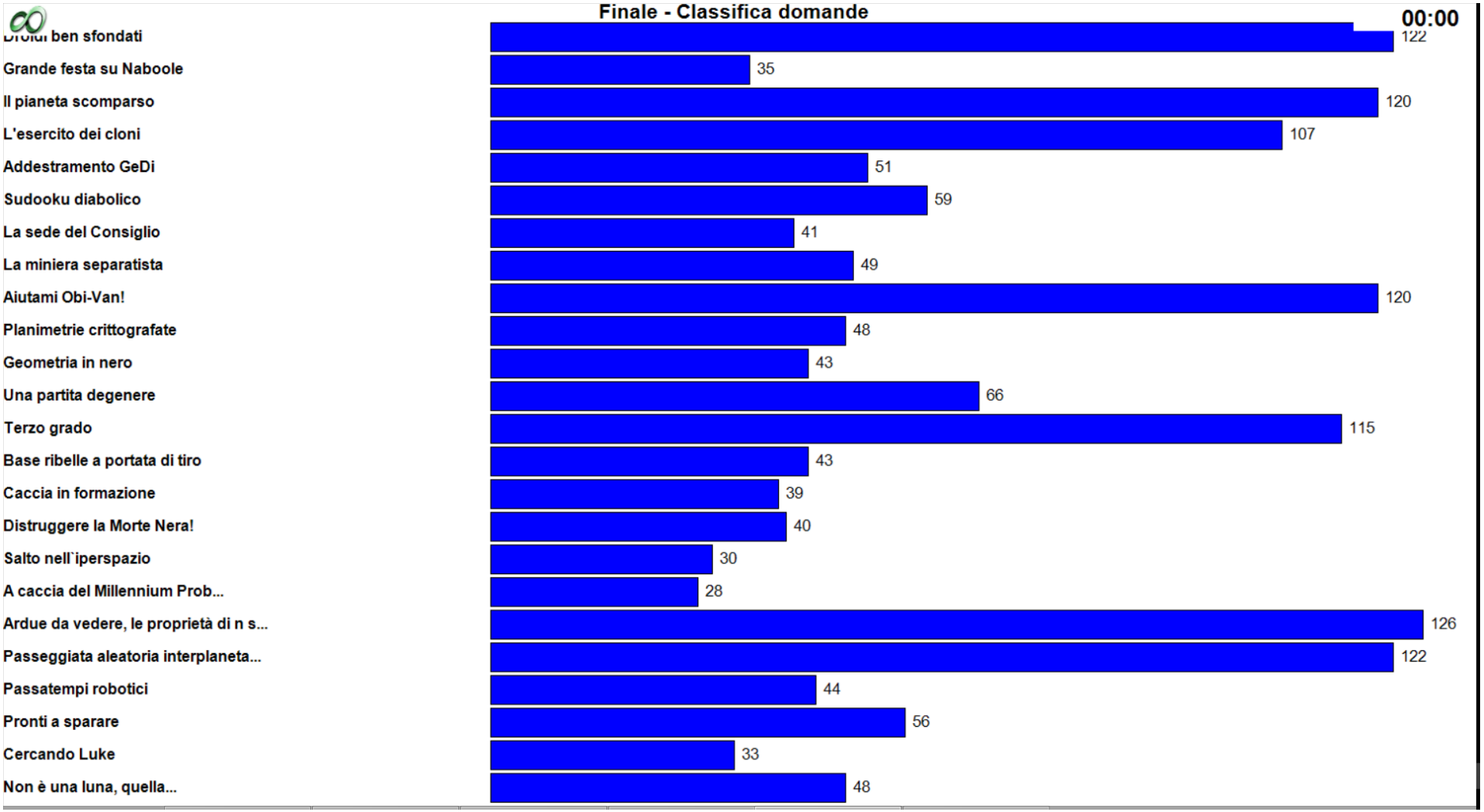
XVII Gara Nazionale a Squadre

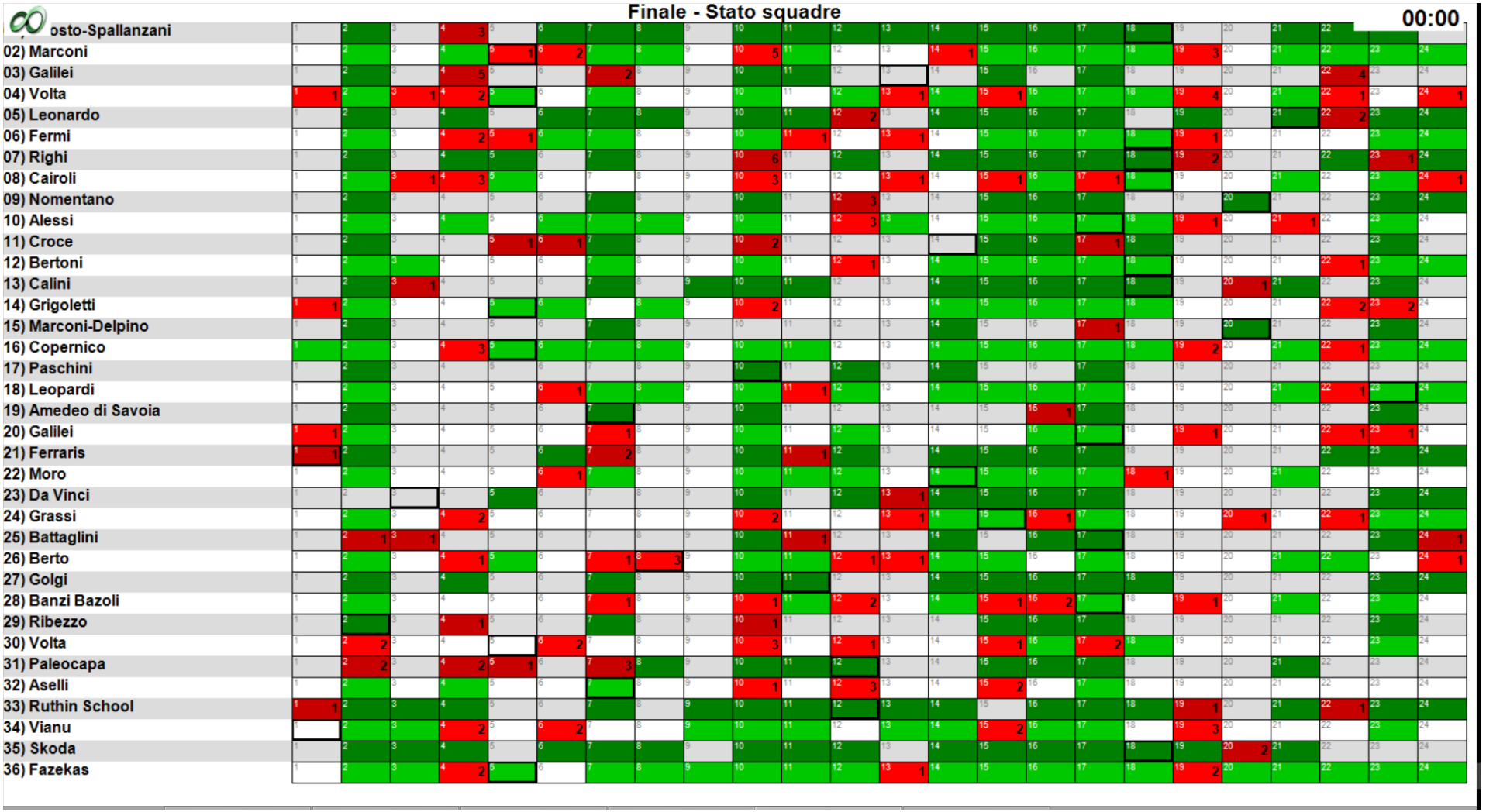
Finale Nazionale – Soluzioni – 7 Maggio 2016



Nr.	Problema	Soluzione
1	[⋆]Droidi ben sfondati	2236
2	Grande festa su Naboole	3930
3	[⋆]Il pianeta scomparso	0300
4	L'esercito di cloni	4525
5	[⋆]Addestramento GeDi	6513
6	Sudooku diabolico	0008
7	La sede del Consiglio	3782
8	[⋆]La miniera separatista	1791
9	Aiutami, Obi-Van!	3249
10	Planimetrie crittografate	0998
11	Geometria in nero	0033
12	Una partita degenere	0010
13	Terzo grado	0082
14	Base ribelle a portata di tiro	1200
15	Caccia in formazione	0331
16	Distruggere la Morte Nera!	2016
17	Salto nell'iperspazio	0004
18	[⋆]A caccia del Millennium Problem	2015
19	[⋆]Ardue da vedere, le proprietà di n sono	1630
20	[⋆]Passeggiata aleatoria interplanetaria	0013
21	Passatempi robotici	0020
22	Pronti a sparare	0042
23	Cercando Luke	4420
24	Non è una luna, quella...	0960


Finale - Classifica finale squadre
00:00
Leonardo, Brescia 1144
Copernico, Brescia 1131
Ariosto-Spallanzani, Reggio Emilia 1093
Alessi, Perugia 852
Golgi, Breno 840
Leopardi, Recanati 826
Bertoni, Udine 789
Calini, Brescia 778
742 Nomentano, Roma
735 Righi, Roma
705 Moro, Reggio Emilia
688 Ferraris, Torino
679 Marconi, Carrara
656 Fermi, Cantù
656 Grigoletti, Pordenone
640 Paleocapa, Rovigo
638 Da Vinci, Treviso
599 Marconi-Delpino, Chiavari
553 Volta, Milano
528 Berto, Mogliano Veneto
509 Ribezzo, Francavilla
483 Paschini, Tolmezzo
466 Grassi, Lecco
449 Aselli, Cremona
420 Cairoli, Vigevano
407 Croce, Roma
398 Amedeo di Savoia, Pistoia
397 Banzi Bazoli, Lecce
384 Battaglini, Taranto
375 Galilei, Pescara
330 Galilei, Trento
233 Volta, Colle Val d`Elsa
Fazekas, Budapest 1315
Ruthin School, Ruthin 1196
Skoda, Prerov 1132
711 Vianu, Bucarest


Finale - Classifica domande
00:00
Droidi ben sfondati
122
Grande festa su Naboole
35
Il pianeta scomparso
120
L'esercito dei cloni
107
Addestramento GeDi
51
Sudooku diabolico
59
La sede del Consiglio
41
La miniera separatista
49
Aiutami Obi-Van!
120
Planimetrie crittografate
48
Geometria in nero
43
Una partita degenere
66
Terzo grado
115
Base ribelle a portata di tiro
43
Caccia in formazione
39
Distruggere la Morte Nera!
40
Salto nell`iperspazio
30
A caccia del Millennium Prob...
28
Ardue da vedere, le proprietà di n s...
126
Passeggiata aleatoria interplaneta...
122
Passatempi robotici
44
Pronti a sparare
56
Cercando Luke
33
Non è una luna, quella...
48

Finale - Stato squadre

00:00