Unione Matematica Italiana
Scuola Normale Superiore

Progetto Olimpiadi della Matematica

GARA di FEBBRAIO

21 febbraio 2017

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:__________ Cognome:__________ Genere: F M

Indirizzo:__________ Città:__________

Scuola:__________ Anno di corso: 1 2 3 4 5 Città:__________

Email:__________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

1. Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici, libri di testo e tavole numeriche. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; in particolare, è vietato l'uso di telefoni cellulari.
2. La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3. Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4. I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5. I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6. Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!
7. Per correttezza nei confronti di coloro che facessero la gara in momenti diversi della giornata, ti chiediamo di non diffondere informazioni sul testo e sulle risposte prima delle 20 di questa sera. Grazie!

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Da riempirsi a cura dell'insegnante:

Valutazione esercizi dimostrativi

15	16	17

Punteggio totale
(da foglio di calcolo)

EGMO 2018 in Italia???
Per essere sempre aggiornati sulle novità del mondo olimpico, visitate il sito internet e il forum:
`http://olimpiadi.dm.unibo.it` `http://www.oliforum.it`

Questa gara non sarebbe stata possibile senza la preziosa collaborazione di tutti coloro che hanno proposto, risolto, modificato e testato i problemi:
Alberto Alfarano, Alessandro Iraci, Andrea Dal Zotto, Andrea Gallese, Andrea Marino, Andrea Monti, Ariel Lanza, Camilla Casamento Tumeo, Dario Rancati, Edoardo Annunziata, Emanuele Tron, Federica Bertolotti, Federica Cecchetto, Federico Glaudo, Federico Poloni, Filippo Baroni, Flavio De Vincenti, Francesco Ballini, Francesco Mugelli, Francesco Sala, Giada Franz, Gianmaria Tomaselli, Giona Micossi, Giovanni Barbarino, Giulia Trevisan, Giuseppe Re, Giuseppe Romanazzi, Jacopo D'Aurizio, Lorenzo Benedini, Lorenzo Furio, Luca Capizzi, Luca Francone, Luca Macchiaroli, Marcello Mamino, Marco Trevisiol, Matteo Rossi, Nicola Ottolini, Paolo Leonetti, Paolo Prenassi, Pasquale Miglionico, Raffaele Salvia, Riccardo Zanotto, Sandro Campigotto, Simone Pelizzola e Vittoria Ricciuti.

Alessandra Caraceni, Luigi Amedeo Bianchi e Davide Lombardo

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Andrea incolla 27 normali dadi a 6 facce tra loro in modo da formare un grande cubo. I dadi sono orientati in modo che le somme dei valori leggibili su ciascuna faccia del cubo siano, in un qualche ordine, $14, 22, 30, 38, 46, 54$. Quanto vale la somma di tutte le facce dei dadi che, essendo state incollate tra loro, non si leggono più?

   (A) 189 **(B)** 204 **(C)** 261 **(D)** 333 **(E)** 363

2. Alberto, Barbara e Ciro si ritrovano un giorno per preparare dei ravioli per una cena di beneficenza a favore delle olimpiadi di matematica. Come prima cosa decidono di ripartire equamente le ore di lavoro fra la mattina e il pomeriggio, e ovviamente lavorano contemporaneamente e per la stessa quantità di tempo. Alberto è molto affidabile: prepara 90 ravioli all'ora per tutta la giornata di lavoro. Barbara fa 110 ravioli all'ora durante la mattina, ma al pomeriggio è più distratta e prepara 70 ravioli all'ora. Ciro fa $2/3$ dei suoi ravioli a un ritmo di 140 ravioli l'ora e l'ultimo terzo a soli 50 ravioli l'ora. Chi ha fatto più ravioli a fine giornata?

   (A) Alberto **(B)** Barbara **(C)** Ciro **(D)** Alberto e Barbara, in ugual numero. **(E)** Alberto e Ciro, in ugual numero.

3. Siano $a < b < c < d < e$ cinque numeri primi in progressione aritmetica di ragione 6 (ovvero $b = a + 6$, $c = b + 6$, $d = c + 6$ e $e = d + 6$). Quali delle seguenti affermazioni è **falsa**?

   (A) $a+b+c+d+e$ è multiplo di 5. **(B)** $abcde > 10^4$. **(C)** $a+b+c+d+e$ è multiplo di 29. **(D)** $abcde$ è multiplo di 29. **(E)** L'unico quadrato perfetto che divide $abcde$ è 1.

   Nota. Si ricorda che un intero n è detto *quadrato perfetto* se esiste un intero a tale che $n = a^2$.

4. Il quadrilatero $ABCD$ ha le diagonali perpendicolari. Si sa inoltre che $AB = 100$, $BC = 120$, $CD = 75$. Determinare la lunghezza di AD.

   (A) 30 **(B)** $24\sqrt{2}$ **(C)** $20\sqrt{3}$ **(D)** 35 **(E)** $\frac{125}{2}$

5. Il polinomio $P(x)$, di grado 42, assume il valore 0 nei primi 21 numeri **primi** dispari e nei loro reciproci (si ricorda che il reciproco di un intero positivo n è il numero razionale $1/n$). Quanto vale il rapporto $P(2)/P(1/2)$?

   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2^{21} **(D)** 3^{21} **(E)** 4^{21}

6. Abelarda, Brunilda e Callisto, tre vecchi conoscenti, vogliono comprare una casa a testa tra le 10 casette in fila sulla via principale della città. Siccome non si sopportano, vogliono assolutamente evitare di essere vicini di casa: desiderano perciò che le case che acquistano siano due a due non adiacenti. In quanti modi possono comprare casa in modo da soddisfare questa condizione?

   (A) 56 **(B)** 120 **(C)** 336 **(D)** 480 **(E)** 504

7. Un trapezio rettangolo con base maggiore AB e base minore CD è circoscritto ad una circonferenza di raggio 10. Si sa che il lato obliquo BC misura 24. Qual è la distanza tra i punti medi di BC e AD?

   (A) 21 **(B)** $\frac{13}{2}\sqrt{11}$ **(C)** $\frac{33}{5}\sqrt{11}$ **(D)** 22 **(E)** 23

8. Luca scrive su una lavagna tutte le possibili sequenze costituite da 2017 interi positivi distinti la cui somma è $2016 \cdot 2017 \cdot 2018$. Fatto ciò, sostituisce ognuna di tali sequenze con il massimo comun divisore dei suoi elementi. Quando questa lunga operazione è terminata, quanto vale il massimo dei numeri scritti alla lavagna?

   (A) 2 **(B)** $2 \cdot 2016$ **(C)** $2 \cdot 2017$ **(D)** $2 \cdot 2018$ **(E)** $2016 \cdot 2018$

9. Quante sono le coppie di numeri reali (x,y) che soddisfano entrambe le equazioni $x + y^2 = y^3$ e $y + x^2 = x^3$?

   (A) 1 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 9 **(E)** Infinite

10. Sia ABC un triangolo acutangolo e sia D il piede della bisettrice uscente da A. Sia ω la circonferenza per A tangente a BC in D, e siano E, F le intersezioni di ω con AB, AC rispettivamente. Le tangenti a ω in E e F si intersecano in P. Sapendo che $PE = 3$ e che il raggio di ω è 4, quanto misura il segmento PD?

    (A) $\frac{3}{4}$ **(B)** 1 **(C)** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ **(D)** $\sqrt{2}$ **(E)** I dati non sono sufficienti per determinarlo

11. Un'urna contiene 8 palline, sulle quali sono scritti i numeri da 1 a 8. Federica pesca due palline di seguito, cancella il numero scritto sulla prima e lo sostituisce con il suo doppio, cancella il numero sulla seconda pallina e lo sostituisce con il quadruplo di esso. Reinserisce quindi le due palline nell'urna (ad esempio, se Federica ha pescato le palline 3 e 7 in quest'ordine, reinserirà nell'urna due palline con i numeri 6 e 28). Infine, estrae nuovamente una pallina: qual è la probabilità che la pallina estratta abbia il numero 8?

    (A) $\frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{1}{7}$ **(C)** $\frac{7}{44}$ **(D)** $\frac{9}{56}$ **(E)** $\frac{1}{6}$

12. Sia n un intero positivo tale che la rappresentazione decimale di 2^n inizia con la cifra 7 (ovvero la cifra non nulla più a sinistra è 7). Con che cifra inizia la rappresentazione decimale di 5^n?

    (A) 1 **(B)** 2 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** Dipende da n

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Il ricco Creso compra 88 vasi identici. Il prezzo di ognuno di essi, espresso in dracme, è un numero intero (lo stesso per tutti gli 88 vasi). Sappiamo che Creso paga un totale di $a1211b$ dracme, dove a, b sono cifre da determinare (e che possono essere distinte o meno). Quante dracme costa un singolo vaso?

14. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso, F un punto sul segmento CD, E il punto di intersezione di AC con BF. È noto che $AB = FC$, $AE = 14$, $BE = 10\sqrt{2}$, $\widehat{BAC} = \widehat{BFD}$, $\widehat{BEA} = 45°$. Quanto misura il segmento EF?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

(a) Dimostrare che esistono infinite terne (x,y,z) di interi positivi tali che $x^2 + y^2 + z^2$ sia un quadrato perfetto.

(b) Dimostrare che esistono infinite terne (x,y,z) di interi positivi tali che $x^2 + y^2 + z^2$ sia un quadrato perfetto e con la proprietà che il massimo comun divisore dei tre numeri (x,y,z) sia 1.

Nota. Si ricorda che un intero n è detto *quadrato perfetto* se esiste un intero a tale che $n = a^2$.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Data una circonferenza ω di diametro AB e P un punto interno al segmento AB, sia M il punto medio di PB. Siano r, s due rette parallele passanti rispettivamente per M, P, non coincidenti con la retta AB né ad essa ortogonali. Sia poi H la proiezione ortogonale di A su s e sia K il punto d'intersezione (distinto da A) tra ω e la retta AH. Siano infine X, Y le intersezioni di r con ω, dove X è dalla parte opposta di H rispetto ad AB.

(a) Dimostrare che il triangolo HYK è isoscele.

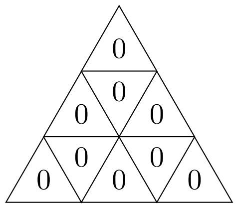
(b) Dimostrare che $BXHY$ è un parallelogramma.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Un triangolo equilatero è diviso in 9 triangolini come in figura, e su ogni triangolino è inizialmente scritto il numero 0. Marco, per passare il tempo, fa il seguente gioco: ad ogni mossa sceglie 2 triangolini con un lato in comune e somma o sottrae 1 ad entrambi i numeri scritti su questi triangolini (si intende che l'operazione effettuata sui due triangolini è la stessa). Dopo qualche tempo si accorge che i numeri scritti sui 9 triangolini sono, in un qualche ordine, $n, n+1, \ldots, n+8$, dove n è un intero non negativo. Dimostrare che n può essere soltanto 0 o 2.



Nota. I casi $n = 0$ e $n = 2$ possono effettivamente verificarsi, ma non si chiede di dimostrare questa affermazione.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________

Soluzione dei Quesiti

1. La risposta è **(E)**. La somma dei valori sulle facce di un dado è $1+2+3+4+5+6=21$. La somma su tutte le facce, visibili e non, è quindi $27 \cdot 21 = 567$. Per ottenere la somma sulle facce nascoste possiamo sottrarre a questo numero la somma dei numeri scritti su quelle visibili: la risposta è quindi $567 - (14+22+30+38+46+54) = 567 - 204 = 363$.

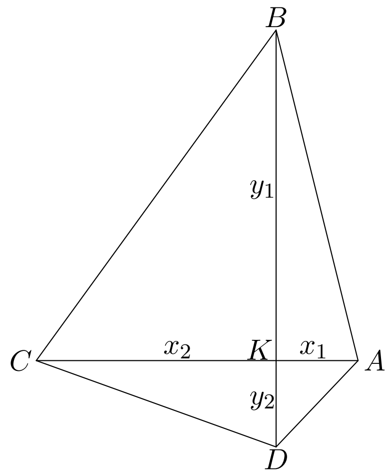
2. La risposta è **(D)**. Sia h il numero di ore di lavoro durante la mattinata (e dunque anche durante il pomeriggio). Sappiamo che Alberto prepara $2h \cdot 90 = 180h$ ravioli, mentre Barbara ne prepara $h \cdot 110 + h \cdot 70 = 180h$. Sia ora t_1 il tempo che Ciro impiega a preparare i primi $2/3$ dei suoi ravioli, e t_2 il tempo che spende a preparare l'ultimo terzo. Se chiamiamo r il numero totale di ravioli preparati da Ciro abbiamo allora

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2h \\ t_1 \cdot 140 = \frac{2r}{3} \\ t_2 \cdot 50 = \frac{r}{3} \end{cases}$$

Possiamo quindi scrivere $t_1 = \frac{2r}{3 \cdot 140}$, $t_2 = \frac{r}{3 \cdot 50}$, e sostituendo nella prima equazione troviamo $r\left(\frac{1}{210} + \frac{1}{150}\right) = 2h$, da cui $r = 175h$.

3. La risposta è **(C)**. Osserviamo che l'unica progressione aritmetica a verificare la condizione è 5, 11, 17, 23, 29. Infatti i cinque numeri a, b, c, d, e, essendo in progressione aritmetica di ragione 6, lasciano cinque resti diversi nella divisione per 5: in particolare uno di essi è multiplo di 5, e quindi uguale a 5 dal momento che è un numero primo. Essendo $5 < 6$ si deve avere proprio $a = 5$, da cui $b = 11$, $c = 17$, $d = 23$, $e = 29$. Si verifica allora facilmente che le affermazioni **(A)**, **(B)**, **(D)**, **(E)** sono vere, mentre **(C)** è falsa. Osserviamo peraltro che le opzioni **(A)**, **(B)**, **(E)** si possono escludere anche senza determinare esplicitamente i numeri a, b, c, d, e. Infatti $a+b+c+d+e = a+(a+6)+(a+12)+(a+18)+(a+24) = 5a+60$, che è multiplo di 5, e dunque l'affermazione (A) è vera. Essendo poi a, b, c, d, e tutti numeri primi non si può avere $a = 2$ o $a = 3$ (in tal caso si avrebbe $b = 8$ o $b = 9$, che non sono primi). Si ha dunque $a \geq 5$, da cui $b \geq 11 > 10 \Rightarrow abcde \geq bcde \geq b^4 > 10^4$, quindi (B) è vera. Inoltre, siccome a, b, c, d, e sono primi distinti, nessun fattore primo appare con esponente 2 o più nella fattorizzazione di $abcde$: ne segue che l'unico quadrato perfetto che divide $abcde$ è 1, e quindi (E) è vera.

4. La risposta è **(D)**. Siano, come in figura, K il punto d'incontro delle diagonali, x_1, x_2 le lunghezze dei segmenti AK, KC e y_1, y_2 quelle dei segmenti BK, KD rispettivamente. Dal momento che tutti gli angoli in K sono retti, per il teorema di Pitagora si ha



$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = AB^2 = 100^2 \\ y_1^2 + x_2^2 = BC^2 = 120^2 \\ x_2^2 + y_2^2 = CD^2 = 75^2 \\ y_2^2 + x_1^2 = DA^2 \end{cases}$$

Sommando la prima e terza equazione e sottraendo la seconda si ottiene allora

$$DA^2 = y_2^2 + x_1^2 = (x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)-(y_1^2+x_2^2) = 100^2+75^2-120^2.$$

Un semplice calcolo fornisce adesso la risposta: $DA^2 = 100^2+75^2-120^2 = 5^2 \cdot (20^2+15^2-24^2) = 5^2 \cdot (400+225-576) = 5^2 \cdot 49 = 5^2 \cdot 7^2 = 35^2$. Si osservi infine che si ottiene la stessa risposta anche se il quadrilatero $ABCD$ non è convesso: in tal caso, il punto D in figura viene sostituito dal punto D', suo simmetrico rispetto a K, e si può applicare il medesimo ragionamento.

5. La risposta è **(E)**. Osserviamo che l'espressione $Q(x) = P(x) - x^{42}P(1/x)$ è un polinomio, dal momento che il monomio x^{42} semplifica il denominatore di $P(1/x)$. Inoltre, esso ha grado al più

42, e se r è uno dei primi 21 numeri primi dispari, $Q(x)$ si annulla in r e in $1/r$: in effetti, si ha

$$Q(r) = P(r) - r^{42}P(1/r) = 0 \qquad Q(1/r) = P(1/r) - (1/r)^{42}P(r) = 0,$$

dove si è usato il fatto che $P(r) = P(1/r) = 0$ per ipotesi. Infine, $Q(x)$ si annulla in 1, perché $Q(1) = P(1) - P(1) = 0$. Visto che $Q(x)$ si annulla per almeno 43 valori distinti di x ma è di grado al più 42 otteniamo che $Q(x)$ è il polinomio costante 0, dunque si ha $P(x) = x^{42}P(1/x)$ per ogni x. Si ha perciò $\dfrac{P(2)}{P(1/2)} = \dfrac{2^{42}P(1/2)}{P(1/2)} = 2^{42} = 4^{21}$.

6. La risposta è **(C)**. Consideriamo dapprima un problema leggermente diverso: lasciamo indeterminato il numero delle case, per ora, e trascuriamo l'ipotesi che le case non possano essere adiacenti. In questo caso, detto n il numero di case sulla via, avremmo $\binom{n}{3}$ modi di scegliere quali case sono abitate dai tre conoscenti e 3! modi di assegnare tali case ai tre.

   A questo punto, per garantirci che le case non siano adiacenti, basta inserire una casa dopo la prima scelta e un'altra dopo la seconda scelta. Siccome sappiamo che le case sulla via in tutto sono 10, ciò significa che le n case considerate prima sono in realtà 8 case. Dunque il numero cercato è

   $$\binom{8}{3} \cdot 3! = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3!} \cdot 3! = 336.$$

7. La risposta è **(D)**. Per il Teorema di Talete la distanza tra i punti medi dei lati obliqui è data dalla semisomma delle basi. Poiché il trapezio è circoscritto ad una circonferenza, la somma delle basi è pari alla somma dei lati obliqui. Poiché il trapezio è rettangolo, il lato obliquo più corto è pari al diametro del cerchio inscritto, dunque la risposta è data da $\frac{20+24}{2} = 22$.

8. La risposta è **(B)**. Consideriamo una sequenza $b_1, b_2, \ldots, b_{2017}$ di numeri interi positivi tutti distinti la cui somma sia $2016 \cdot 2017 \cdot 2018$. Sia d il massimo comun divisore degli elementi di questa sequenza. Per definizione, i numeri $a_1 := b_1/d, a_2 := b_2/d, \ldots, a_{2017} := b_{2017}/d$ sono anch'essi interi positivi tutti distinti, e la loro somma è dunque almeno pari alla somma $1+2+\cdots+2017$. Si ha allora

   $$2016 \cdot 2017 \cdot 2018 = b_1 + \cdots + b_{2017} = d \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_{2017}) \geq d \cdot (1+2+\cdots+2017) = d \cdot \frac{2017 \cdot 2018}{2},$$

   da cui $d \leq 2 \cdot 2016$. D'altro canto, detto $D = 2 \cdot 2016$, la sequenza $D, 2D, 3D, \cdots, 2017D$ è una delle sequenze che vengono scritte sulla lavagna, e chiaramente il massimo comun divisore dei suoi elementi è proprio D.

9. La risposta è **(B)**. Sottraendo le equazioni membro a membro otteniamo

   $$(y - x)(-1 + x + y) = (y - x)(y^2 + xy + x^2),$$

   da cui vediamo che deve valere almeno una delle due uguaglianze $x = y$ e $x^2 + y^2 + xy - x - y + 1 = 0$. Se $x = y$, sostituendo nelle equazioni date nel testo otteniamo $x + x^2 = x^3$, da cui si trovano facilmente le tre soluzioni $(x,y) = (0,0)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Se invece $x \neq y$ si deve necessariamente avere $x^2 + y^2 + xy - x - y + 1 = 0$. Quest'ultima equazione si può riscrivere come $\frac{1}{2}((x+y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2) = 0$, che chiaramente non ha soluzioni (in quanto almeno uno dei tre numeri $x + y, x - 1, y - 1$ è diverso da zero). Ci sono dunque esattamente tre soluzioni, tutte con $x = y$.

10. La risposta è **(B)**. Sia O il centro di ω; per ipotesi si ha $\widehat{EAD} = \widehat{FAD}$, quindi D è il punto medio dell'arco EF e in particolare OD passa per il punto medio del segmento EF. Ne segue che OD è l'asse di EF, perché è ad esso perpendicolare e passa per il suo punto medio. Ora, essendo PE e PF tangenti, vale $PE = PF$ e dunque anche P appartiene all'asse di EF. Questo implica che P,D,O sono allineati. Il triangolo PEO è rettangolo in E per costruzione, quindi abbiamo $PO^2 = (PD + DO)^2 = (PD + 4)^2 = EO^2 + PE^2 = 4^2 + 3^2$, da cui si ricava $PD = 1$.

    Nota. Una svista nella preparazione della gara ha fatto sì che l'ipotesi "ABC acutangolo" venisse omessa nella versione finale del testo, e che quindi la soluzione corretta fosse **(E)**: se l'angolo in A è ottuso, il segmento PD misura 9. Tuttavia, per non sfavorire chi non si fosse accorto di questo problema di configurazione, ai fini della selezione abbiamo assegnato punteggio pieno ad entrambe le risposte **(B)** ed **(E)**, nonostante la prima di queste fosse formalmente falsa con il testo utilizzato il giorno della gara.

11. La risposta è **(A)**. Supponiamo che la pallina pescata alla fine da Federica riporti il numero 8. Questo può accadere per tre motivi diversi (che sono tra loro mutuamente esclusivi):

    - la pallina era numerata 8 fin dall'inizio, e non è stata estratta nelle prime due pescate. Questo evento ha probabilità $\frac{1}{8} \times \frac{6}{8}$, ovvero la probabilità di aver pescato proprio la pallina che all'inizio riportava il numero 8 ($\frac{1}{8}$), moltiplicata per la probabilità che tale pallina non fosse fra le prime due estratte ($\frac{6}{8}$, dal momento che le palline non estratte sono 6 su un totale di 8);
    - la pallina riportava inizialmente il numero 4, ed è stata pescata alla prima estrazione: con un ragionamento simile al precedente, troviamo che questo evento ha probabilità $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8}$;
    - la pallina riportava inizialmente il numero 2, ed è stata pescata alla seconda estrazione: questo evento ha nuovamente probabilità $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8}$.

    In totale, la probabilità che la pallina pescata da Federica riporti il numero 8 è $\frac{1}{8}\left(\frac{6}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$.

12. La risposta è **(A)**. Essa può essere trovata sfruttando l'uguaglianza $5^n = \frac{10^n}{2^n}$. Sia c il numero di cifre decimali di 2^n; l'algoritmo di divisione in colonna comporta che la prima cifra del quoziente $\frac{10^n}{2^n}$ sia il risultato della divisione intera di 10^c per 2^n. Tale risultato è 1, poiché $2^n \geq 7 \cdot 10^{c-1}$ e dunque $2 \cdot 2^n \geq 14 \cdot 10^{c-1} > 10^c$.

    In alternativa, è possibile esprimere formalmente la soluzione senza far riferimento all'algoritmo di divisione in colonna. Sia x la cifra iniziale di 5^n; esistono interi k, h tali che $7 \cdot 10^k \leq 2^n < 8 \cdot 10^k$ e $x \cdot 10^h \leq 5^n < (x+1) \cdot 10^h$. Moltiplicando queste disuguaglianze termine a termine e sfruttando il fatto che $2^n \cdot 5^n = 10^n$ otteniamo

    $$7x \cdot 10^{k+h} \leq 10^n < 8(x+1) \cdot 10^{k+h},$$

    da cui in particolare $10^{k+h} < 10^n < 10^{k+h+2}$. Chiaramente questo è possibile solo se $n = k+h+1$. Dalla disuguaglianza $7x \cdot 10^{k+h} < 10^n = 10^{k+h+1}$ otteniamo allora $7x < 10$, che (essendo x un intero positivo) è possibile solo per $x = 1$.

13. La risposta è 1274. Notiamo che il numero $a1211b$ dev'essere divisibile per 88, quindi dev'essere divisibile sia per 11 che per 8. Sappiamo che un numero è divisibile per 8 se e soltanto se lo sono le sue ultime 3 cifre, quindi $11b$ dev'essere divisibile per 8. Notiamo che $8 \cdot 14 = 112$ è l'unico numero della forma $11b$ divisibile per 8, quindi $b = 2$ e $a12112$ è divisibile per 8 per ogni scelta di a. Il criterio di divisibilità per 11 ci dice che la differenza tra la somma delle cifre di posto pari e quella delle cifre di posto dispari dev'essere un multiplo di 11, ovvero che $(2+1+1) - (1+2+a) = 1 - a$ dev'essere divisibile per 11. Dal momento che a è una cifra, dunque compresa fra 0 e 9, questa condizione è verificata solo per $a = 1$. La soluzione è quindi $\frac{112112}{88} = 1274$.

14. La risposta è 6. Si prolunghi il segmanto BF dalla parte di F, e su tale prolungamento si consideri il punto K, tale che $FK = 14$. L'angolo $\widehat{CFK}$ è uguale all'angolo $\widehat{DFB}$, in quanto opposti al vertice per costruzione, per cui i triangoli ABE e FCK sono simili e, in particolare, congruenti, in quanto hanno due coppie di lati uguali ($AB = CF$ e $AE = FK = 14$) e l'angolo compreso uguale ($\widehat{BAE} = \widehat{DFB} = \widehat{CFK}$). Essendo i due triangoli congruenti, abbiamo che $BE = CK = 10\sqrt{2}$, perché lati che si corrispondono, e analogamente $\widehat{AEB} = \widehat{FKC} = 45°$ perché angoli corrispondenti. Abbiamo inoltre $\widehat{KEC} = \widehat{AEB} = 45°$ perché opposti al vertice, per cui il triangolo ECK è isoscele con due angoli di 45°, quindi in particolare è rettangolo in C. Possiamo quindi calcolare la lunghezza della sua ipotenusa: $EK = KC \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 20$. Per differenza si ottiene allora $EF = EK - FK = 20 - 14 = 6$.

15. (a) Osserviamo dapprima che $x = 1, y = 2, z = 2$ è una soluzione, in quanto $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$. Ne segue allora che, per ogni intero positivo n, la terna $x = n, y = 2n, z = 2n$ soddisfa la richiesta del problema, in quanto

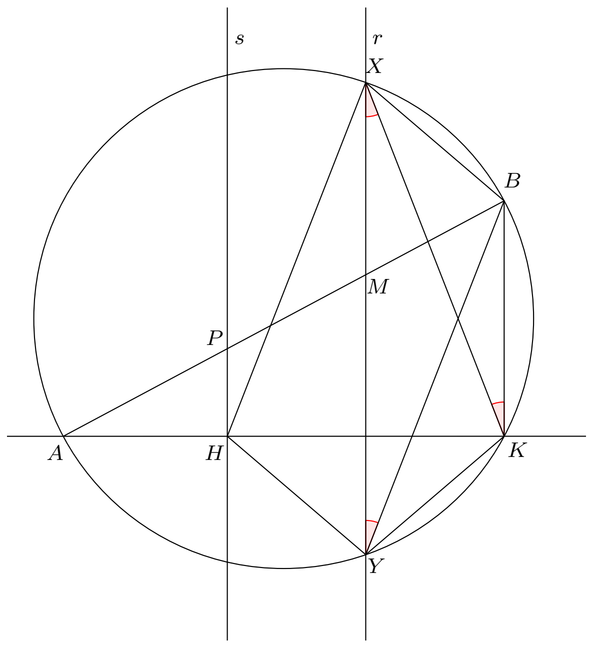
$$n^2 + (2n)^2 + (2n)^2 = 9n^2 = (3n)^2.$$

(b) Per ogni intero positivo t, la terna $1, 2t, 2t^2$ soddisfa le richieste del problema: in effetti il massimo comun divisore di questi tre numeri è sempre uguale ad 1, e si ha

$$1 + (2t)^2 + (2t^2)^2 = 1 + 4t^2 + 4t^4 = (1 + 2t^2)^2.$$

Un possibile modo di trovare questa soluzione è il seguente: innanzitutto, per assicurarci che la condizione $MCD(x,y,z) = 1$ sia verificata scegliamo $x = 1$. Possiamo poi sperare che $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + z^2$ possa essere identificato con il quadrato di un certo binomio. Scrivendo $1 + y^2 + z^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, è naturale scegliere $a = 1$, $2ab = y^2$ e $b = z$. Risolvendo questo sistema troviamo $z = b = \frac{y^2}{2}$, e chiaramente affinché z sia intero è necessario che y sia pari, quindi scriviamo $y = 2t$ per un certo t intero positivo: si trova allora la soluzione proposta, $x = 1, y = 2t, z = \dfrac{y^2}{2} = 2t^2$.

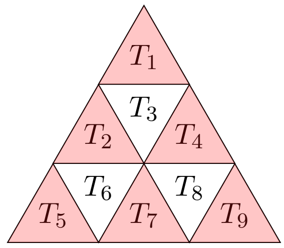
16. (a) Essendo AB un diametro di ω l'angolo insistente sull'arco corrispondente è retto e dunque $\widehat{AKB} = 90° = \widehat{AHP}$; si conclude che BK è parallelo a r e a s. Allora si può applicare il teorema di Talete a queste tre parallele e alle trasversali AB, AK: r passa per il punto medio di BP e quindi deve passare anche per il punto medio di HK. Notando che r è perpendicolare al segmento HK si conclude che deve esserne l'asse, da cui la tesi (in quanto Y sta su r).



(b) Ricordando che le rette XY, BK sono parallele, si nota che $\widehat{KXY} = \widehat{XKB} = \widehat{XYB}$ e dunque i segmenti BX, YK sono congruenti (in quanto sui rispettivi archi insistono angoli congruenti). Ma allora $BX = YK = YH$; in maniera del tutto analoga si vede che anche X giace sull'asse di HK e che $BY = XK$, da cui $XH = XK = BY$. Dunque il quadrilatero $BXHY$ ha le coppie di lati opposti rispettivamente congruenti ed è un parallelogramma.

17. Come in figura, numeriamo i triangolini da T_1 a T_9 e coloriamo di rosso i triangoli T_1, T_2, T_4, T_5, T_7, T_9, lasciando in bianco gli altri 3. Detto m_i il numero scritto nel triangolo T_i in un certo momento, dimostriamo che la somma sui triangolini bianchi è uguale a quella sui rossi, cioè si ha

$$m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_7 + m_9 = m_3 + m_6 + m_8. \qquad (1)$$



Sicuramente l'uguaglianza (1) vale all'inizio del gioco, prima che Marco faccia qualunque mossa, in quanto entrambi i membri di (1) sono pari a 0. Dimostriamo che, ad ogni mossa, l'equazione rimane vera. Comunque scelti 2 triangolini vicini, uno è bianco e l'altro è rosso; vengono modificati, pertanto, solo un m_i a destra e solo un m_j a sinistra nell'equazione (1). Notiamo, però, che entrambi vengono o incrementati o decrementati di 1, perciò se l'uguaglianza era verificata prima di eseguire la mossa lo sarà anche dopo averla applicata. Supponiamo ora che valga

$\{m_1, \ldots, m_9\} = \{n, \ldots, n+8\}$. Comunque vengano scelti 3 interi tra questi, la loro somma non può superare $(n+8)+(n+7)+(n+6)$, da cui

$$m_3 + m_6 + m_8 \leq 3n + 21; \tag{2}$$

similmente, scegliendo 6 interi nell'insieme $\{n, \ldots, n+8\}$, la loro somma è almeno pari alla somma dei 6 più piccoli, quindi

$$m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_7 + m_9 \geq 6n + 15. \tag{3}$$

Combinando le ultime due disuguaglianze con (1) otteniamo

$$6n + 15 \leq m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_7 + m_9 = m_3 + m_6 + m_8 \leq 3n + 21, \tag{4}$$

che implica $3n \leq 6$, cioè $n \leq 2$. Rimane da escludere che possa essere $n = 1$. In tal caso $m_1 + \cdots + m_9 = 1 + \cdots + 9 = 45$, che è un numero dispari. Tuttavia, ogni mossa di Marco cambia la somma $m_1 + \cdots + m_9$ di $+2$ o -2 (a seconda che scelga di sommare o sottrarre dai due triangolini vicini); dal momento che tale somma vale 0 all'inizio del gioco, essa rimane sempre pari (ed in particolare diversa da 45), quindi il caso $n = 1$ è impossibile.

Scale di valutazione degli esercizi dimostrativi

Esercizio 15

Ovviamente si assegnino **15 punti** per una soluzione completa, anche con traccia diversa dalla soluzione proposta. Per soluzioni incomplete si propongono i seguenti punteggi parziali.
La parte (a) vale **6 punti**, suddivisi come segue:

- **2 punti** per chi trovi una soluzione particolare;
- **4 punti** per chi osservi che, data una soluzione particolare (x_0,y_0,z_0), si ottengono infinite soluzioni considerando le terne $(x_0 n, y_0 n, z_0 n)$ al variare di n.

La parte (b) vale **9 punti**. Si assegnino **3 punti** a chi faccia la scelta di prendere una delle tre variabili uguale ad 1, anche in assenza di ulteriore progresso verso la soluzione.

Osserviamo esplicitamente che una costruzione corretta che risponda alle richieste della parte (b) è ovviamente anche una soluzione della parte (a); si assegnino tuttavia solo **13 punti** a chi dovesse eventualmente risolvere solo il punto (b) dell'esercizio, senza commentare che questo implica la parte (a).

Esercizio 16

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema.
Per la parte (a) si assegni un totale di **8 punti**, suddivisi come segue:

- **2 punti** per chi nota che BK è parallelo alle rette r, s;
- **4 punti** per chi osserva che XY passa per il punto medio di HK;
- **2 punti** per chi conclude che XY è l'asse di HK e ne ricava la tesi.

Per la parte (b) si assegnino **7 punti**, suddivisi come segue:

- **4 punti** per chi dimostra che $BKYX$ è un trapezio isoscele;
- **1 punto** per chi ne deduce che $BX = YK = YH$;
- **2 punto** per chi conclude l'esercizio notando che analogamente si ha $XH = XK = BY$.

Esercizio 17

Ovviamente si assegnino **15 punti** per una soluzione completa, anche con traccia diversa dalla soluzione proposta. Per soluzioni incomplete si propone di assegnare punteggi parziali secondo il seguente schema:

- **2 punti** per chi *dichiara* l'uguaglianza (1);
- **2 punti** per chi distingue i triangoli rossi e bianchi;
- altri **3 punti** per chi dimostra che l'uguaglianza (1) è sempre vera;
- **2 punti** per chi dimostra (2) e (3);
- **2 punti** per chi ottiene (4);
- **2 punti** per chi dimostra che la somma $m_1 + \cdots + m_9$ è sempre pari;
- **2 punti** per chi esclude il caso $n = 1$.

Si assegnino comunque **4 punti** ad una soluzione parziale che contenga solo una dimostrazione del fatto che n non può essere dispari.