

II GARA NAZIONALE A SQUADRE

Cesenatico, 5 maggio 2001

1. La confederazione IMO

15 punti

La confederazione IMO è una pacifica civiltà aliena che si trova nella Galassia Asip. La galassia è formata da n gruppi di stelle, ciascuno dei quali forma un cerchio. Il cerchio più piccolo (chiamato I_1) ha raggio 1 Imoparsec. Se ad esso si circoscrive un quadrato e a questo si circoscrive un cerchio si trova la seconda cintura di stelle (I_2). In maniera analoga a partire da I_2 si ottiene I_3 , e poi I_4 , I_5 , \dots . L'ultima cintura è l'unica che ha un raggio più grande di 2001 Imoparsec. Quante sono in tutto le cinture?

2. Toponomastica

20 punti

I pianeti della confederazione vengono identificati da una coppia di numeri naturali. La capitale (il pianeta d'origine della civiltà) è $(0, 0)$ e il primo pianeta colonizzato viene identificato con la coppia $(1, 0)$, il secondo da $(0, 1)$, il terzo da $(2, 0)$, il quarto da $(1, 1)$ e così via. Che posizione occupa il pianeta $(24, 25)$ nella storia dei pianeti colonizzati dagli Imo?

(NB: Più formalmente (a, b) viene prima di (c, d) se e solo se:

$a + b < c + d$ oppure $a + b = c + d$ e $a > c$.)

3. Esploratori maldestri

10 punti

Cinque navi spaziali imesi stanno tornando a casa dopo un viaggio d'esplorazione nella nostra galassia e una di esse ha appena subito un guasto irreparabile. L'equipaggio di questa nave viene trasferito sulle altre quattro e quando queste navi riprendono il loro viaggio ciascuna ha lo stesso numero di persone a bordo. Il capitano della nave guasta si accorge che se la sua ciurma fosse stata meno numerosa non sarebbe stato possibile distribuirla tra le navi in modo da ottenere lo stesso risultato. Visto che all'inizio del viaggio le quattro navi sane contenevano 109, 49, 267 e 278 imesi, quanti sono i membri dell'equipaggio della nave guasta?

4. Imontecitorio

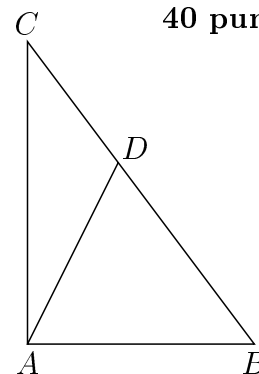
60 punti

Il parlamento della confederazione ha come base un triangolo di cui un angolo è doppio dell'altro. Tutti i lati del triangolo hanno lunghezza intera e uno misura 55 imometri. Quanto può essere lungo, al massimo, il perimetro dell'edificio?

5. Il parco

40 punti

Nel parco davanti al parlamento c'è un'aiuola a forma di triangolo rettangolo tagliata in due parti dalla strada che porta all'ingresso del Senato (vedi figura). I lati dell'aiuola, il tratto di strada AD e i lati BD e DC hanno lunghezza intera e BC misura 40 imometri. Quanti imometri misura DC (scrivere 0 se i dati sono insufficienti a risolvere il problema)?



6. Strane leggi

65 punti

Uno dei provvedimenti più contestati del Senato imese è una legge che proibisce la pubblicazione di cruciverba. Alcune associazioni studentesche hanno lanciato per protesta il crucinero sul mensile "Contestazione".

1	2	3	4
2			
3			
4			

Orizzontali

- (1) La risposta esatta a questo gioco.
 (2) È un numero primo, uguale al prodotto di più primi consecutivi meno 1 (esempio $5 \times 7 \times 11 - 1$, anche se questo non è un numero primo).
 (3) Prodotto di tre numeri consecutivi (esempio $4 \times 5 \times 6$).
 (4) È un numero primo.

Verticali

- (1) Somma di due cubi (di numeri naturali, naturalmente).
 (2) Numero palindromo di 4 cifre potenza di un primo (un numero palindromo è un numero che non cambia se lo si legge da destra a sinistra).
 (3) È un numero primo.
 (4) 3 verticale al quadrato.

(NB: La risposta a una qualsiasi delle definizioni può anche essere un numero minore di 1000. Se una delle risposte dovesse essere, ad esempio, 13 nella tabella si inserisca 0013)

7. Abbonamenti

45 punti

Per abbonarsi a “Contestazione” bisogna pagare 50 Scudi all’Associazione Liberi Studenti Imesi. Nella confederazione si possono trovare banconote di ogni valore da 1 a 100 Scudi. In quanti modi un Imese può pagare l’abbonamento a “Contestazione” usando tre banconote diverse tra loro?

8. Giochi ...

25 punti

I periodici imesi sono ricchi di rubriche su solitari e passatempi. Eccone uno. Si parte con tre punti su una circonferenza; una mossa consiste nel tracciare le bisettrici del triangolo individuato dai tre punti e considerare i punti che tali bisettrici intercettano sulla circonferenza. Xam inizia a giocare con dei punti che sulla circonferenza individuano archi di lunghezza 1, 2 e 3. Xam si ferma dopo 2001 mosse. Quante cifre dopo la virgola ha il prodotto delle lunghezze dei 3 archi individuati dagli ultimi punti disegnati?

9. ... e passatempi

30 punti

Eccone un altro. Si parte con un certo numero di mucchi di pietre e sono consentite le seguenti operazioni: se ne possono unire due e se ne può dividere uno in due mucchi uguali (se il numero delle sue pietre è pari). Supponendo che Obob parta con 3 mucchi fatti rispettivamente di 441, 1437, e 327 pietre qual è il numero massimo di mucchi a cui può arrivare?

10. Antiche civiltà

60 punti

Uno dei più importanti problemi dell’archeologia Imese è la decifrazione dei numeri della civiltà Qwghlm, della quale si conosce piuttosto bene la scrittura. È dato per scontato che i Qwghlmiani usassero un sistema in base 11, avendo 11 tentacoli. Un brillante archeologo ha appena trovato una pagina di un vecchio quaderno di matematica con su scritto:

“usando il metodo di 'Rtennio [NDR: un noto matematico Qwghlmiano] si conclude che le radici del polinomio

$$x^4 - \Lambda \Gamma x^2 \dots x + \dots = 0$$

sono tutte intere”

Le lettere greche rappresentano due diverse cifre Qwghlmiane ignote. Calcolare il massimo valore che può assumere il termine noto.

11. Architettura

20 punti

La tipica casa imese è formata da tre camere quadrate di lato lungo 10 imometri collegate da un vano a forma triangolare, in modo che ogni lato di questo vano coincida con un lato di una delle camere. Il tetto è un cono circolare retto. Qual è il raggio minimo che la base del tetto deve avere affinché tutta la casa sia coperta? (Nella risposta indicate solo la parte intera del numero trovato)

12. Arredamento**40 punti**

Gli orologi a muro in uso nella confederazione hanno tutti la forma di un rettangolo avente l'angolo tra le diagonali di 45° . Il lato maggiore è parallelo al suolo, mentre il lato minore misura 1224 imopollici. Vi è solamente una lunga lancetta delle ore che si muove come la nostra e dopo mezza giornata ha compiuto un giro esatto. Nella capitale un giorno dura 20 ore; in questo momento è l'una un quarto e la lancetta individua un punto che divide in due segmenti il lato maggiore del rettangolo. Qual è la lunghezza del minore dei due segmenti?

13. Civiltà alternative**30 punti**

Un altro antico popolo esistito prima della nascita della confederazione rappresentava ogni numero mediante una sequenza di due simboli: \circ e \triangle . Il simbolo \circ in fondo a una sequenza significava aggiungere un'unità, mentre il simbolo \triangle significava moltiplicare per 7. Ad esempio, la sequenza $\circ\circ\circ\circ\triangle\circ$ rappresentava il numero 29. Qual è il numero minimo di simboli necessari per rappresentare il numero 2001?

14. Calendari**30 punti**

Nel calendario imese gli anni bisestili sono quelli corrispondenti a numeri la cui somma delle cifre è 7 (ad esempio l'anno 1060 è bisestile). Quanti anni bisestili ci sono stati tra l'anno zero e l'anno 5000?

15. Casabianca**30 punti**

Il presidente della confederazione Ocrum Itrof vuole farsi una piscina nel giardino della sua villa. Poiché non ama le figure geometriche troppo complicate decide che la sua piscina avrà forma rettangolare, così come è rettangolare il suo giardino. Inoltre vorrebbe mettere intorno alla vasca un vialetto costituito da tre tratti dritti in modo da formare un triangolo. Considerando trascurabile la larghezza del vialetto, quale sarà al più l'area base della piscina (in im^2) se il giardino si estende per 3500 im^2 ?

16. Rivalità sportive**55 punti**

Due fratelli Imesi in orbita attorno alla Terra hanno appena assistito in Imo-visione al quinto set della partita di pallavolo Italia-Jugoslavia, che si è concluso con il punteggio di 15-12 a favore della Jugoslavia. *“Peccato, dopo i 5 punti consecutivi di Sartoretti pensavo proprio che potessimo rimontare”*, dice Oloap, che tifa per l'Italia. *“Ti sbagli”*, dice Aerdna, *“l'Italia non ha mai conquistato più di 4 punti consecutivi”*. Oloap guarda le statistiche, vede che in tutto il set ci sono stati 8 cambi palla e si mette a calcolare la probabilità che lui abbia ragione (calcolando il numero di tutti i possibili andamenti del punteggio, quelli che gli darebbero ragione e ricavando la percentuale trascurando le cifre decimali). Che percentuale troverà Oloap?

NB: Una squadra fa punto anche quando ottiene il cambio palla.

17. Patrimoni**30 punti**

Di ritorno dal loro viaggio Aerdna ed Oloap ereditano da un prozio un campo di forma quadrata il cui lato è lungo 100 imotavole. Nel testamento si dice che la divisione del campo deve essere fatta tracciando una retta che taglia due lati opposti in modo che la differenza dei perimetri delle due parti sia 120 imotavole. Qual è il rapporto tra l'area della parte più estesa e l'area di quella meno estesa?

18. Solidarietà imese**10 punti**

Oloap e Aerdna, dopo aver ereditato il loro campo da 10000 imotavole² decidono di ararlo dividendo il lavoro a metà. Prevedono di impiegare 8 ore di tempo ciascuno lavorando entrambi. Poiché vorrebbero impiegare meno tempo, chiedono aiuto a Innaig, anch'egli proprietario di un appezzamento da arare, che lavora alla loro stessa velocità ed è disposto ad aiutarli purché l'aiuto venga esattamente ricambiato da entrambi. Così facendo, ognuno di loro lavora 6 ore per arare tutti i campi. Quante imotavole² è grande il campo di Innaig?

19. Prestiti fra amici**10 punti**

Ammac e Olonam desidererebbero acquistare un'auto, dividendo a metà la spesa, ma attualmente essi posseggono solo i $3/4$ della cifra necessaria. Il generoso Ollimac presta ad entrambi, a tasso zero, la quantità di soldi che serve a ciascuno di essi per completare la loro quota; in particolare presta 2 milioni di scudi a Olonam. Ammac impegna per l'acquisto 10 milioni di scudi (tutti i suoi averi!), oltre alla cifra prestatagli da Ollimac. Quanti milioni di scudi costa l'auto?

20. Ancora archeologia**45 punti**

Grazie anche al vostro aiuto il sistema di numerazione della civiltà Qwghlm è stato finalmente decifrato. Ora potete apprezzare un altro problema trovato da alcuni valenti archeologi e tradotto nel nostro sistema decimale

“Quali sono le ultime quattro cifre del coefficiente più grande (in valore assoluto) del polinomio

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)(x-16)(x-32)(x-64) \text{ ?}”$$

21. Banche generose**25 punti**

L'economia Imese è soggetta a una forte svalutazione e quindi i tassi di interesse sono molti alti. In particolare con gli attuali tassi della BCI dopo 20 anni l'ammontare di un conto corrente viene quintuplicato. Supponendo che oggi Ocnarf depositi uno scudo e che i tassi rimangano sempre gli stessi, quali saranno le ultime 4 cifre dell'estratto conto che gli eredi di Ocnarf potranno leggere tra 40020 anni?

22. Algebristi imesi**45 punti**

Nei libri di testo della confederazione vengono detti “onesti” quei polinomi i cui coefficienti sono numeri interi tali che la somma dei loro quadrati sia minore o uguale al grado del polinomio. Quanti sono i polinomi onesti (di una variabile) di grado minore o uguale a cinque?

(NB: I polinomi costanti nonnulli hanno grado 0 e il polinomio 0 per convenzione ha grado $-\infty$: pertanto quest'ultimo non è un polinomio onesto)

23. Aritmetica imese**15 punti**

Nelle scuole elementari imesi vengono insegnate cinque operazioni. La quinta, che indicheremo con \circ e chiameremo somma imese, è definita sulle frazioni nel modo seguente:

$$\frac{a}{b} \circ \frac{c}{d} = \frac{ac}{ad+bc}.$$

Calcolate il più piccolo intero positivo a per cui esistono tre interi nonnulli b , c e d tali che la somma imese di a/b e c/d coincida con la loro somma ordinaria. Rispondete 0 se la somma imese non coincide mai con quella ordinaria quando a è un intero positivo.

24. Scolari imesi**15 punti**

A uno scolaro imese è stato assegnato il seguente esercizio. Deve trovare tutte le coppie ordinate di numeri naturali (m, n) in modo che sia m che n siano divisori di 385 e tali che m è divisore di n . Potreste dargli una mano dicendogli quante sono? (NB: 1 e k vengono considerati divisori di k)

25. Arte imese**25 punti**

Vicino al palazzo del parlamento c'è una piazza con tre fontane circolari. Due di esse hanno raggio 52 imometri, sono tangenti esternamente e tangenti a un viale alberato. La terza è tangente esternamente alle prime due ed al viale. Quanti imometri è lungo il suo raggio?

Istruzioni generali

Si ricorda che in tutti i problemi occorre indicare come risposta un numero intero, compreso tra 0000 e 9999. Qualora la quantità richiesta non dovesse risultare un numero intero, si indichi la sua parte intera. Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142$$

$$\sqrt{3} = 1,7320$$

$$\sqrt{5} = 2,2361$$

$$\pi = 3,1416.$$