

1. Numeri... “formosi”

20 punti

A Matelandia è buona abitudine assegnare a taluni numeri una “forma” geometrica. Ad esempio, il numero 36 è un numero quadrato e triangolare, ovvero si può sia scrivere come quadrato, $36 = 6 \times 6$, sia si può rappresentare come un triangolo equilatero con base 8, infatti $36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$. Qual è il più piccolo numero quadrato e triangolare più grande di 36?

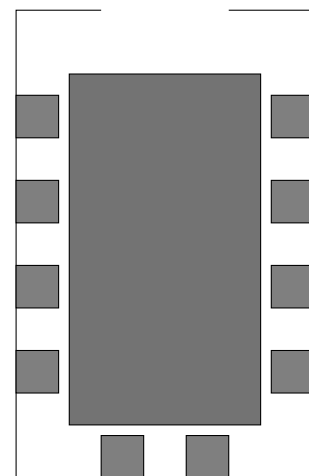
2. La sala consiliare di Matelandia

25 punti

La sala consiliare della città di Matelandia è molto piccola: ci stanno solamente 10 seggiole contro i muri di tre lati della stanza (l'ingresso è sul quarto lato) e un tavolo al centro.

All'inizio di ogni riunione il sindaco entra per primo e i 9 consiglieri entrano rigorosamente in ordine di età: dal più anziano al più giovane.

Il sindaco sceglie dove sedersi, mentre ciascuno dei consiglieri, a causa delle ristrettezze del luogo, deve sedersi accanto a qualcuno che si è già sistemato. In quanti modi diversi può disporsi il consiglio?



3. Ladri ingegnosi...

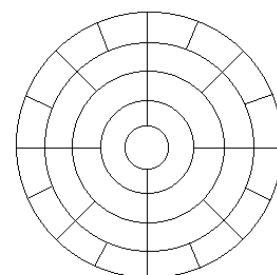
50 punti

La principale banca della città ha una cassaforte con una combinazione a quattro cifre, che per sicurezza il direttore cambia ogni giorno in questo modo: moltiplica la combinazione attuale per 3 ed eventualmente taglia la cifra più a sinistra. Una sera uno dei cassieri spiando il direttore scopre che la combinazione non contiene cifre dispari. La sera dopo una delle guardie giurate riesce a scoprire che nessuna delle cifre è multipla di 3. La sera successiva un ladro prova ad aprire la cassaforte e dopo vari tentativi si accorge che le cifre devono essere tutte multiple di 3, ma non riesce a penetrare nella cassaforte. Il giorno seguente il ladro ascolta per caso la guardia e il cassiere e viene a sapere ciò che avevano scoperto. Quale combinazione dovrebbe tentare il ladro tornando a svaligiare la banca quella sera stessa?

4. Percorsi giocosi

35 punti

Nel parco di Matelandia, i bambini si divertono a saltellare da una casella all'altra del tracciato rappresentato a fianco. Si parte dalla casella posta al centro e si salta di casella in casella senza mai tornare verso l'interno, e senza mai ripassare da una casella già visitata. Quando si arriva al bordo ci si ferma. In quanti modi diversi è possibile raggiungere la periferia?



5. Il costo dei biglietti aerei

15 punti

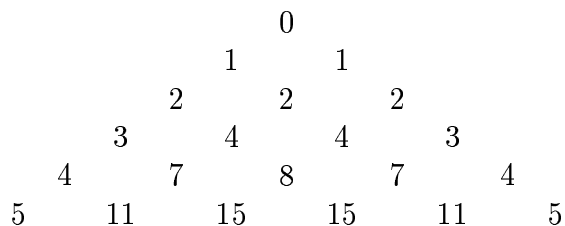
La compagnia aerea Air Matelandia ha uno strano modo di calcolare il prezzo dei biglietti di andata e ritorno. Il prezzo espresso in MatEuro è pari alla velocità media dell'aereo (rispetto al suolo)

calcolata su entrambi i viaggi ed espressa in km/h, moltiplicata per la durata complessiva dei due viaggi (andata e ritorno) espressa in ore. Damiano si imbarca su un volo che viaggia alla velocità costante di 400 km/h rispetto all'aria. Durante tutto il viaggio di andata ha un vento contrario di 40 km/h, durante il viaggio di ritorno ha lo stesso vento a favore. Sapendo che i due viaggi di Damiano sono complessivamente durati 2 ore, quanti MatEuro è costato il suo biglietto?

6. Monumenti matematici

80 punti

Nella piazza principale della città troneggia una stele di pietra. L'iscrizione della stele è un triangolo di numeri che ha sui lati i numeri 0, 1, 2, 3... come in figura. Ogni numero all'interno del triangolo è la somma dei due che gli stanno sopra. Indichiamo con $f(n)$ la somma dei numeri della riga che inizia col numero n . Qual è il resto della divisione di $f(2003)$ per 2003?



7. Polinomi pesanti

35 punti

I professori del liceo Kolmogorov, il più prestigioso di Matelandia, amano mettere alla prova i loro allievi con problemi un po' bizzarri. Eccone uno.

Dato un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, di grado $n \geq 0$ a coefficienti interi con $a_n \neq 0$, associamo a P il suo peso $p = n + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$. Quanti sono i polinomi a coefficienti interi aventi peso pari a 6?

8. Il parco di Matelandia

35 punti

Il parco principale della città ha la forma di un trapezio. La sua base minore è lunga 90 metri e il segmento congiungente i punti medi delle diagonali è lungo 5 metri. Quanto misura la base maggiore?

9. Geometria curiosa

55 punti

I lati AB e AC di un triangolo misurano 10 cm, si prendano S su AB e T su AC in modo che $AT = AS = 6$ cm. Indichiamo con I il punto di intersezione di BT e CS . Sapendo che l'area del quadrilatero $ASIT$ è $4,5 \text{ cm}^2$, dire quanto vale l'area di ABC in cm^2 .

10. Bravi allievi!

20 punti

Gli insegnanti dell'istituto Kolmogorov non sono mai contenti dei risultati dei loro allievi, e continuano a proporre esercizi sempre più arzigogolati. Eccone un altro esempio.

Un polinomio a coefficienti interi $q(x)$ divide un altro polinomio $p(x)$ anch'esso a coefficienti interi. (cioè esiste un terzo polinomio $r(x)$, anch'esso a coefficienti interi, tale che $p(x) = q(x) \cdot r(x)$) Sapendo che la somma dei coefficienti di $p(x)$ è $15!$, quanti sono i valori possibili di $q(1)$?

11. Un metodo complicato...

45 punti

All'ultima elezione della città Manolo e Michele, i due candidati alla carica di sindaco, hanno ottenuto gli stessi voti. Lo strano sistema elettorale matelandese prevede una complicata estrazione a sorte per stabilire chi dei due sarà il sindaco. Si prende una scatola contenente 5 palline numerate da 1 a 5. Per 4 volte si estrae una pallina, rimettendola dentro dopo aver letto il numero estratto. Detti a , b , c e d i quattro numeri estratti. Michele diventa sindaco se $ab + bc + cd + da$ è pari, altrimenti diventa sindaco Manolo. Manolo, per ragioni di principio, protesta: a suo dire il complicato procedimento non è affatto equo. Qual è la probabilità che $ab + bc + cd + da$ sia pari? (esprimere il valore in percentuale, se il risultato non è un numero intero scrivere nella risposta la parte intera del risultato)

12. Furti Matelandesi**75 punti**

La combinazione del salvadanaio di Camillo è un numero dispari di 4 cifre, ciascuna di esse è compresa fra 0 e 9. Per scrivere tale combinazione su un foglio senza che altri malintenzionati possano usare l'informazione per aprire il salvadanaio, Camillo elimina la cifra più a sinistra e scrive il risultato della conversione in base 3 di tale numero. Ivan trova il foglietto e pensa che vi sia scritto un numero in base 4. Lo riconverte in base 10, prova a usarlo così com'è e il salvadanaio di Camillo si apre. Qual è il più piccolo numero > 1 che può rappresentare la combinazione del salvadanaio di Camillo?

13. Telefonate matematiche**20 punti**

Determinate il prefisso telefonico della città di Matelandia, sapendo che è il massimo numero naturale di 4 cifre (in scrittura decimale) avente le seguenti proprietà:

- a) La somma di tale numero e del suo palindromo è 7216
- b) La somma delle cifre di tale numero è 17
- c) Le cifre agli estremi differiscono al più di 4.

14. Tutti al cinema!**65 punti**

Al cinema 3D di Matelandia c'è una sola fila con 35 posti numerati. All'inizio dello spettacolo, entrano 16 persone, che, per stare più comode, si dispongono in modo che nessuna di esse abbia una persona seduta nei posti vicini. Quante disposizioni diverse sono possibili?

15. Il laghetto del parco**35 punti**

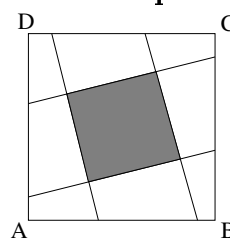
Nel parco di Matelandia si vuole progettare un laghetto a forma di triangolo isoscele acutangolo. Esso deve risultare perfettamente inscritto in una aiuola circolare di raggio 5 metri. La somma del lato diverso dai due uguali fra loro e dell'altezza ad esso relativa è 15 metri. Sapendo che l'acqua avrà ovunque profondità 1 metro, quanti m^3 di acqua dovranno essere immessi nel laghetto?

16. Confetti... "laboriosi"**85 punti**

Nella città di Matelandia si trova un rinomato confettificio, che produce due tipi di confetti alla mandorla. Il confetto di tipo A subisce tre lavorazioni successive: alla macchina I (durata 6 minuti) alla macchina II (durata 12 minuti) alla macchina III (durata 18 minuti). Il confetto di tipo B subisce anch'esso tre lavorazioni successive: alla macchina I (durata 18 minuti) alla macchina II (durata 12 minuti) alla macchina III (durata 6 minuti). Sapendo che in un giorno la macchina I funziona al massimo per 22 ore, la macchina II al massimo per 19 ore, la macchina III al massimo per 23 ore, in quanti modi è possibile scegliere la coppia di interi ≥ 0 (n_A, n_B), indicante il numero di ciascuno dei due tipi di confetti prodotti, in modo da non violare le condizioni poste sopra?

17. Il centro commerciale di Matelandia**65 punti**

Un architetto di grido è stato chiamato per progettare un enorme centro commerciale alla periferia della città. L'intero centro commerciale deve essere edificato in un quadrato $ABCD$ di lato 240 metri. Il progetto dell'architetto prevede che la pianta del centro commerciale sia l'intersezione di due parallelogrammi. Il primo di essi ha due lati opposti, ciascuno di lunghezza 120 metri, che giacciono rispettivamente sui lati AD e BC del quadrato, mentre il secondo ha due lati opposti (sempre di lunghezza 120 metri) che giacciono sui lati AB e CD .



Dette S_{\max} la massima e S_{\min} la minima area possibile della pianta del centro commerciale, quanto vale $S_{\max} - S_{\min}$?

18. Sculture molto... geometriche**85 punti**

Nel parco della città si trova un'interessante scultura astratta, che è stata ottenuta nel seguente modo. Dato un cubo di lato $L = 20$, si immagina di tagliarlo con un piano in modo da ottenere un esagono regolare e di costruire su quest'ultimo un prisma esagonale retto infinito. La scultura è l'intersezione del cubo con il prisma infinito. Qual è il suo volume?

19. Riposi meritati**80 punti**

Alla fine di una dura giornata di lavoro, Nicola e Gianmarco vanno a prendere un aperitivo in uno dei bar vicini al comune. Per passare il tempo giocano a una variante Matelandese dell' "uomo nero". All'inizio del gioco, ciascuno di loro ha quattro carte, una per ogni seme, e Gianmarco ha in più una carta speciale (l' "uomo nero").

Al primo turno di gioco, Nicola pesca a caso una carta tra quelle di Gianmarco e la ripone tra le proprie. A questo punto, se possiede due carte dello stesso seme le scarta entrambe, altrimenti le conserva tutte. Al turno successivo tocca a Gianmarco proseguire pescando una carta a caso da quelle di Nicola, e così via. Vince chi resta senza carte.

Qual è (in percentuale, se decimale dare la parte intera) la probabilità di vittoria di Nicola?

20. Sculture molto...geometriche 2**75 punti**

Nel parco di Matelandia, una celebre scultura è formata da due cilindri retti di raggio 10 dm (cioè diametro 20 dm) e altezza 20 dm che si intersecano in modo che i loro assi siano incidenti nel loro punto medio e perpendicolari. Qual è il volume della scultura in dm^3 ?

Istruzioni generali

Si ricorda che in tutti i problemi occorre indicare come risposta un numero intero, compreso tra 0000 e 9999. Qualora la quantità richiesta non dovesse risultare un numero intero, si indichi la sua parte intera. Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142$$

$$\sqrt{3} = 1,7320$$

$$\sqrt{5} = 2,2361$$

$$\pi = 3,1416.$$