V GARA NAZIONALE A SQUADRE

Cesenatico, 8 maggio 2004

Istruzioni Generali

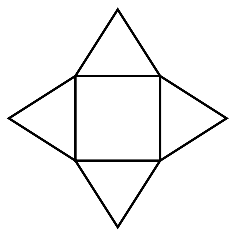
- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{2} = 1.4142$ $\quad$ $\sqrt{3} = 1.7321$ $\quad$ $\sqrt{7} = 2.6458$ $\quad$ $\pi = 3.1416$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata mediante l'apposito cartellino consegnato dai capitani al tavolo della giuria.
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani al tavolo delle domande.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. **Le sentinelle**

   Il palazzo di Herrovaccio, re di Franquvia, ha pianta quadrata che ricopre un area di 1600 miglia franquviane quadrate. Quattro sentinelle sorvegliano ognuna un lato del palazzo, disposte come in figura (le sentinelle formano con i lati del palazzo quattro triangoli equilateri). Qual è l'area (in miglia quadrate) del quadrilatero che ha per vertici le quattro sentinelle?



2. **Una ricorrenza importante**

   In occasione del 1000^{mo} anniversario dalla fondazione del regno di Franquvia, la zecca reale ha deciso di coniare tre monete, di raggi rispettivamente 20, 30 e 40mm. Le monete sono vendute in un elegante astuccio a forma di triangolo equilatero. Qual è la minima lunghezza, in millimetri, del lato di tale triangolo, in modo che sia possibile collocare le tre monete nell'astuccio senza che si sovrappongano?

3. **Prodotti tipici**

   Le dame Elissa, Fiammetta e Neifile hanno acquistato una confezione cadauna dei tipici biscotti di Franquvia. Madama Elissa distribuisce equamente i biscotti della sua confezione ai suoi 3 figli, madama Fiammetta ne mangia due e poi divide in parti uguali i rimanenti biscotti della sua confezione ai suoi 5 figli, infine madama Neifile ne mangia due e distribuisce equamente i suoi biscotti rimanenti ai suoi 7 figli. Quanti biscotti contiene, al minimo, una confezione?

4. **Il vizio del gioco**

   Nelle bische dei quartieri più sordidi della capitale del regno di Franquvia, si usa scommettere ai dadi. Qual è la probabilità che lanciando due dadi si ottengano due numeri il cui massimo comun divisore sia 1?
   Espressa la probabilità come frazione $\frac{m}{n}$ irriducibile, si scriva nella risposta la somma $m + n$.

5. **Il genetliaco della regina**

   In occasione del genetliaco della regina, Il re Herrovaccio desidera compiere un atto di magnanimità. Poiché nelle segrete del palazzo di Franquvia ogni cella è numerata con un numero di esattamente tre cifre, egli decreta che sia graziato ogni prigioniero rinchiuso in una cella il cui numero ha la somma delle cifre divisibili per 11. Quanti prigionieri al più saranno graziati?

6. **Un volontario coatto**

   Ai 9999 soldati della guardia reale di Franquvia è assegnato un numero identificativo, da 1 a 9999. Il comandante vuole scegliere un volontario e procede nel seguente modo: dispone i soldati, in ordine di numero, su un'unica linea, indi fa uscire dai ranghi tutti i soldati che occupano un posto pari. Una volta serrati i ranghi, ripete la stessa procedura, finché rimangono solo tre soldati. Di questi, il soldato di mezzo è il volontario. A quale numero corrisponde il volontario?

7. **Dinastie**

   Per antica tradizione, tutti i re di Franquvia portano il nome di Herrovaccio e si distinguono tra loro mediante un numero. Il primo re portava il numero $a_1 = 1$, e poi, via via, ad ogni re successivo è stato assegnato un numero, ottenuto dal precedente, secondo la regola

   $$a_{n+1} = 7a_n + 1.$$

   Qual è stato il primo re della dinastia a portare un numero divisibile per 30?

8. **Il giardino cadetto**

   Il giardino del castello del principe cadetto di Franquvia è ottenuto dall'unione di 6 cerchi di raggio 10m, i cui diametri sono lati di un esagono regolare. Qual è l'area del giardino?

9. **La camera delle torture**

   Ogni cella delle segrete del palazzo è numerata con un numero di esattamente tre cifre. Il carnefice reale si accorge che la cella delle torture ha il più piccolo, tra i numeri di tre cifre tutte distinte, che sia pari alla media aritmetica dei sei numeri ottenibili permutandone le cifre. Qual è questo numero?

10. **Giudizio salomonico**

    Il re di Franquvia adotta metodi singolari per amministrare la giustizia. In un processo per bancarotta ha rivelato alle parti di avere in mente tre numeri reali x, y, z per cui

    $$x - 7y + 8z = 4 \qquad \text{e} \qquad 8x + 4y - z = 7.$$

    Si aggiudica la causa il primo che riesce a rivelare quanto vale $x^2 - y^2 + z^2$. Mentre l'avvocato del debitore protesta, sostenendo che non ci sono abbastanza condizioni per rispondere, i creditori urlano un numero, vincendo la causa. Quale numero hanno urlato?

11. **Disputa mistica**

    A corte è guerra aperta tra il chierico Didimo e l'incantatrice Dianora. Motivo del contendere è la realizzazione di un quadrilatero mistico. Didimo propone di costruirlo seguendo regole alchemiche: si considerano due circonferenze di raggi 4 e 16 tangenti esternamente, ed una retta tangente ad entrambe le circonferenze in due punti distinti. Il quadrilatero mistico dovrà essere il trapezio di vertici i due centri delle circonferenze e i due punti di tangenza con la retta.

    Dianora, invece, predilige la magia: considera le stesse circonferenze e la stessa retta, ma il quadrilatero mistico dovrà essere il trapezio di vertici i due centri delle circonferenze e i due punti di intersezione della retta con le perpendicolari, condotte dai due centri, alla congiungente i centri.

    Sperando di sedare l'alterco, il re propone che il quadrilatero mistico sia la parte comune ai due quadrilateri proposti da Didimo e Dianora. Qual è l'area di questa parte comune?

12. **Un noioso turno di guardia**

I 9999 soldati della guardia reale devono concordare a chi toccherà il prossimo turno di guardia a palazzo. Didimo, il chierico di corte, passando per caso, ascolta la loro conversazione e propone una soluzione: si tratta di sommare tutti gli interi positivi n per cui

$$\frac{n-1}{401-n}$$

sia un quadrato perfetto. Poiché ogni soldato è identificato con un numero da 1 a 9999, il risultato della somma indicherà il soldato di turno. La soldataglia accetta entusiasta. A chi toccherà il turno di guardia?

13. **La piazza del mercato**

La piazza del mercato di Franquvia ha la forma di un triangolo le cui misure dei lati sono pari a 2, 5 e 6 miglia franquviane. La gilda dei mercanti vuole dividere la piazza con un segmento i cui estremi siano su due lati del triangolo, in modo che il segmento abbia lunghezza 1 miglio e che la porzione più piccola abbia area pari a un quarto dell'area totale. Quanti di questi segmenti si possono tracciare?

14. **Carovita**

Messer Guiglielmo Guardastagno, mercante franquviano, ha fissato i prezzi delle sue merci in modo che siano tutti numeri interi positivi che siano divisibili per 30 ed abbiano esattamente 30 divisori. Se S è la somma di tutti gli interi positivi di questo tipo, quali sono le ultime quattro cifre di S?

15. **Numismatica franquviana**

La moneta nazionale franquviana è il Franqo. Non esistono però monete del valore di un Franqo: la moneta più piccola vale 11 Franqi, e tutte le monete hanno come valore un numero palindromo di Franqi. Messer Guiglielmo Guardastagno e la gilda dei mercanti si sono lamentati perché con questi tagli di monete non è possibile comporre esattamente una qualsivoglia quantità intera di Franqi (ad esempio, non si possono comporre 37 Franqi con le monete disponibili). Qual è il più grande numero che sicuramente non si può esprimere con le monete Franquviane?

Un numero palindromo è un numero che resta invariato se si leggono le sue cifre (in base 10*) da destra o da sinistra: ad esempio sono palindromi* 11, 10001, 949.

16. **Un singolare processo**

Il re di Franquvia si distingue per la sua stravaganza. Ad un altro processo ha richiesto alle parti in causa di determinare il numero delle soluzioni intere positive dell'equazione

$$4x + 12y + 3z^2 = 2004.$$

Quante sono?

17. **Incantesimi**

Il chierico Didimo, esperto di numerologia e manipolazioni magiche di simboli, ha scoperto un incantesimo. Per attivarlo deve scrivere il numero magico 2004 in tutti i modi possibili che usino solo il simbolo 1 e l'operazione di somma. Quanti sono questi modi possibili?

Attenzione! Ai fini del conteggio, due somme che differiscono solo per l'ordine degli addendi, vanno contate una volta sola.

18. **Il lotto di Franquvia**

Per rimpinguare le casse del regno, il Gran Ciambellano ha deciso di lanciare un nuovo tipo di lotto. Ogni settimana sono estratti due numeri distinti. Se N è il più grande e n il più piccolo, si deve indovinare quanti tra i numeri

$$\binom{N}{0} \quad \binom{N}{1} \quad \cdots \quad \binom{N}{k} \quad \cdots \quad \binom{N}{N}$$

sono divisibili per n.

Se in questa settimana sono stati estratti i numeri 5 e 37, su che numero si doveva scommettere per vincere il lotto di Franquvia?

Si ricorda che il coefficiente binomiale è l'intero positivo dato da $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

19. **La sala del trono**

La sala del trono di Franquvia è illuminata da 6 grandi finestre. Le finestre possono essere completamente oscurate dall'interno con una tenda, oppure dall'esterno con un pannello di legno. La damigella di compagnia della regina ha contato tutti i modi differenti di aprire o chiudere, indipendentemente, le tende e i pannelli, in modo che la luce entri da un numero pari di finestre. Lo scudiero del re invece ha conteggiato tutti i modi differenti di aprire o chiudere le tende e i pannelli, per i quali le finestre che illuminano la sala sono in numero dispari. Qual è la differenza tra questi due numeri?

20. **Imperialismo**

Il principe di Franquvia decide di ingrandire i suoi domini fondando 25 città su un arcipelago disabitato composto da 13 isole in modo che su ogni isola vi sia almeno una città. Vuole però che tra ogni coppia di città su isole differenti vi sia un collegamento tramite vascelli. Determinare il minimo numero possibile di tali collegamenti.

21. **In locanda**

Agilulfo, Bernabò, Chiara, Dioneo ed Elissa sono soliti incontrarsi alla locanda *Alla Brocca*. Una sera si dividono un orcio di vino. Dopo aver riempito i loro bicchieri, decidono di ri-dividere il vino. Agilulfo divide in parti uguali l'intero contenuto del suo bicchiere tra gli altri quattro amici, lo stesso fa poi Bernabò e così via. Dopo che, alla fine, anche Elissa ha diviso in parti uguali l'intero contenuto del suo bicchiere nei bicchieri degli altri quattro giovani, i cinque si accorgono di avere nei bicchieri esattamente le stesse quantità di vino che avevano all'inizio. Sapendo che l'orcio conteneva 750ml di vino, quanto vino aveva Chiara nel bicchiere?

22. **La corona**

La corona per il principe di Franquvia è di foggia circolare, con un diadema frontale. Ci sono poi 8 pietre preziose incastonate a intervalli regolari attorno alla corona. Il mastro orefice, per decorare la corona, ha a disposizione pietre di quattro differenti tipi: diamanti, rubini, ametiste e smeraldi. In quanti differenti modi egli può decorare la corona, in modo che due qualsiasi pietre incastonate consecutivamente siano di tipi diversi?

Si intendono consecutive anche le pietre separate dal diadema.

23. **Di nuovo in locanda**

Agilulfo, Bernabò, Chiara, Dioneo ed Elissa hanno un loro passatempo. Ciascuno porta in locanda un sacco con dei Franqi: li contano e, se ne hanno tutti in quantità differenti, allora quello che ne ha più di tutti, dá uno dei suoi Franqi a ciascuno degli altri. Non appena più di una persona ha lo stesso numero di Franqi il gioco finisce.

All'inizio, Agilulfo ha 101 Franqi, Bernabò 70, Chiara 17, Dioneo ne ha 104 ed Elissa 113. Dopo quale mossa sarà Chiara ad avere più Franqi di tutti?

24. **Voragine finanziaria**

La colonizzazione dell'arcipelago è costata uno sproposito. Il deficit K delle casse reali è pari al prodotto dei 20 fattori seguenti:

$$K = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 19! \cdot 20!.$$

Qual è il minimo valore del prodotto dei numeri, scelti tra $1, 2, \dots, 20$, tali che, eliminando il corrispondente fattoriale da K, si renda il numero K un quadrato perfetto?