



VI GARA NAZIONALE A SQUADRE

Finale – 7 maggio 2005

Istruzioni Generali

Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.

Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.

Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.

Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.

Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2360 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

10 minuti dall'inizio: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).

30 minuti dall'inizio: termine ultimo per fare domande sul testo.

120 minuti dall'inizio: termine della gara.

1. I predatori dei templi perduti

Un'antica pergamena, scovata dal noto archeomatematologo Polinomia Jones negli archivi del Vaticano, rivela che ognuno degli antichi templi dedicati a Atyahsinger ha la forma di un quadrato di lato 60 metri. Il pavimento di ogni tempio è ricoperto da 900 piastrelle quadrate, ciascuna di lato 2 metri: di queste, 450 sono bianche e 450 nere. Le piastrelle formano 2 rettangoli bianchi e 2 neri, in modo che due rettangoli dello stesso colore non abbiano parti di lato in comune.

Sapendo che per ognuna delle possibili piastrellature c'è esattamente un tempio con una siffatta pavimentazione, quanti templi dovrà cercare il nostro eroe?

2. Lavoro d'equipe

Il noto archeomatematologo Polinomia Jones è stato incaricato di gestire ben 8 campi di scavo archeologico in giro per il mondo. Decide allora di suddividere il lavoro tra i suoi collaboratori.

Ogni collaboratore è responsabile di 3 campi e nessuna coppia di collaboratori è responsabile di più di un campo. Qual è il numero massimo di collaboratori di cui dispone Polinomia Jones?

3. Spedizione nel deserto

Il noto archeomatematologo Polinomia Jones sta organizzando una spedizione nel deserto ed ha bisogno di 18 animali da soma per trasportare l'attrezzatura. Le bestie possono essere dromedari o cammelli. Come tutti sanno, i dromedari sono animali poco socievoli e piuttosto irascibili: se messi in fila, non tollerano di avere innanzi a loro (o alle loro spalle) animali della loro stessa specie.

In quanti differenti modi Polinomia Jones può comporre la carovana di animali, senza che questi si azzuffino?

4. Perduti nel deserto

Il noto archeomatematologo Polinomia Jones si è perso, con la sua spedizione, nel mezzo del deserto. Una rapida verifica rivela che la spedizione dispone di 2005 borracce che ancora contengono dell'acqua. Polinomia Jones decide allora di distribuire equamente l'acqua all'interno delle borracce e per questo fa una serie di travasi: un travaso consiste nel prendere una certa quantità d'acqua da una borraccia e spostarlo in un'altra.

Ad ogni travaso però, Polinomia Jones rischia di sprecare acqua, per cui vuole completare il lavoro con il minor numero possibile di travasi. Qual è questo minimo numero?

5. La strada ritrovata

Polinomia Jones e la sua spedizione sono sperduti nel deserto. Il suo collaboratore e amico Al Jabr, con un bastone fa uno schizzo della mappa sulla sabbia. Al Jabr disegna un triangolo di vertici ABC , segna il circocentro O del triangolo e i punti medi M di AB e N di BC . La distanza OM è di 210 km , la distanza ON di 176 km e $OM^2 + ON^2 = (\frac{AC}{2})^2$. Quanto vale il raggio del cerchio inscritto in ABC ?

6. La profezia

L'antico popolo dei Couranteni usava contare in base 5. Il loro veggente un giorno profetizzò che il regno dei Couranteni sarebbe durato tanti anni quante le cifre del loro numero sacro. A suggellare la profezia, tracciò uno zero, l'ultima cifra del numero sacro.

Il noto archeomatematichista Polinomia Jones ha recentemente scoperto che il numero sacro ai Couranteni è 253^{253} . Quanto sarebbe durato, secondo la profezia, il regno dei Couranteni?

7. Culto funerario

Recentemente il noto archeomatematichista Polinomia Jones ha ritrovato una cittadella funeraria dei Couranteni. La cittadella ha forma circolare con raggio 2005 metri e, esternamente a questa, sono posizionate delle cripte.

Ogni cripta ha forma circolare con raggio 1 metro ed è tangente alla cittadella. Qual è il più grande numero di cripte che può essere stato costruito dai Couranteni?

8. Al fuoco di bivacco

Durante le loro spedizioni in giro per il mondo, il noto archeomatematichista Polinomia Jones e il suo collaboratore e amico Al Jabr sono soliti passare le serate cimentandosi con semplici problemi davanti al fuoco.

Una sera Al Jabr sfida il nostro eroe a trovare tutte le terne di interi (a, b, c) , ognuno dei quali compreso tra 0 e 2005, tali che $b^2 + b = c^2 - c$ e $a^2 = b + c$. Quante sono?

9. La via delle statue

Il noto archeomatematichista Polinomia Jones è recentemente venuto in possesso di un'antica mappa che indica l'ingresso segreto al tempio di Atyahsinger. Lungo la strada che porta al tempio vi sono 2006 statue in fila, ognuna a 1 metro di distanza dall'altra. Secondo la mappa, l'ingresso si trova in prossimità di uno dei punti che minimizzano la somma delle distanze del punto da ogni statua. Qual è il minimo valore di questa somma?

10. Il tempio maledetto

Le chiavi della sapienza aprono la sala segreta del tempio di Atyahsinger. Ogni chiave ha la forma di un triangolo rettangolo con i lati a, b, c di lunghezze intere tali che $(a, b, c) = 1$ e l'ipotenusa c è pari a $\frac{3}{4}a + \frac{4}{5}b$.

Calcolare la somma dei perimetri di tutte le chiavi della sapienza che corrispondono a triangoli non simili.

11. Le iscrizioni misteriose

Il noto archeomatematichista Polinomia Jones, esplorando il tempio di Atyahsinger trova questa misteriosa iscrizione:

Le frasi false che mi precedono sono più di quelle vere che mi seguono; inoltre la prossima frase è falsa
ripetuta 2005 volte di seguito, con l'eccezione che l'ultima dice soltanto

Le frasi false che mi precedono sono più di quelle vere che mi seguono.

Quante sono le frasi false?

12. Il grande circo

Il noto archeomatematichista Polinomia Jones e la sua compagna Claire Petiblanco si concedono un giorno di relax tra un'avventura e l'altra al circo. Una delle attrazioni è il *Cervellone Elettronico* del dottor Smurf.

Il funzionamento è semplice: all'inizio del gioco il cervellone sorteggia un numero misterioso n tra 1 e un miliardo, che deve essere indovinato. Polinomia Jones paga un tallero per premere un grosso bottone

rosso. Alla prima volta che preme il tasto, il cervellone restituisce il resto della divisione di n^2 per 2, alla seconda il resto della divisione di n^3 per 3, alla quarta di n^4 per 4 e così via.

Ad un certo punto, Polinomia Jones è finalmente sicuro di poter determinare il numero. Quante volte, al minimo, ha premuto il tasto rosso?

13. Al fuoco di bivacco II

Durante le loro spedizioni in giro per il mondo, il noto archeomatematiko Polinomia Jones e il suo collaboratore e amico Al Jabr sono soliti passare le serate cimentandosi con semplici problemi davanti al fuoco.

Una sera Al Jabr sfida il nostro eroe a trovare quante soluzioni reali, comprese tra 1 e 100 (estremi inclusi) ha l'equazione

$$[x^2] + [x]^2 = 2x[x].$$

Qual è la risposta esatta?

[Il simbolo $[x]$ indica la parte intera di x , cioè il più grande intero n tale che $n \leq x$]

14. Numeri allo specchio

L'antico popolo dei Couranteni era uso scrivere i numeri con le cifre ordinate sia da destra verso sinistra che da sinistra verso destra. Polinomia Jones ha scoperto che un intero couranteno è un intero positivo k tale che per ogni intero positivo n divisibile per k , l'intero ottenuto da n invertendo l'ordine delle cifre è anche divisibile per k . Qual è la somma di tutti gli interi couranteni?

15. La gemma di Oseen

La gemma di Oseen, recentemente ritrovata dal noto archeomatematiko Polinomia Jones, ha la forma di un poliedro con 2005 spigoli. Sia F_3 il numero di facce triangolari della gemma, F_4 il numero di facce quadrangolari, etc. Calcolare

$$3F_3 + 4F_4 + \dots$$

16. L'inseguimento

Polinomia Jones deve trasportare la *gemma di Oseen* dal tempio di Atyahsinger, dove è stata ritrovata, al campo base. Polinomia parte dal tempio e arriva al campo base in 4 ore. Appena arrivato, deposita la gemma e ritorna al tempio in 3 ore.

La sua fidanzata, Claire Petiblanco accompagna Polinomia per la prima ora del suo viaggio, poi torna lentamente al tempio, dove arriva contemporaneamente al ritorno di Polinomia.

Al Jabr, il fedele assistente di Polinomia, parte nello stesso istante della coppia dal tempio, ma procedendo molto più lentamente. Al Jabr raggiunge l'amico Polinomia quando manca una sola ora al suo ritorno al tempio e lo accompagna fino all'arrivo.

Il dottor Von Kernel, lo storico arcinemico di Polinomia, vuole impadronirsi della gemma. Alla guida di una banda di predoni, parte dal tempio un po' di tempo dopo Polinomia e, viaggiando più velocemente, arriva contemporaneamente a lui al campo base.

Fatto inconsueto, lungo le loro strade, Claire Petiblanco, Al Jabr e Von Kernel si ritrovano tutti contemporaneamente nello stesso luogo. Sapendo che ogni persona ha percorso ogni singolo tratto di strada con velocità costante, quanti minuti dopo Polinomia sono partiti Von Kernel e la banda di predoni?

17. La trappola

Polinomia Jones è in trappola! L'astuto Von Kernel l'ha rinchiuso in una cella a forma di cubo di lato 10 metri. L'unico modo per liberarsi è di toccare i punti centrali delle 6 facce seguendo il più breve percorso possibile. Quanti centimetri è lungo questo percorso?

18. La trappola II

Polinomia Jones è ancora in trappola nel cubo! L'aver percorso il cammino più breve è stato inutile. Evidentemente, Polinomia deve percorrere un particolare percorso di lunghezza minima. L'unica soluzione è percorrerli tutti.

Quanti sono i percorsi possibili che separano il nostro eroe dalla libertà?

19. Vecchi ricordi

Polinomia Jones ha ritrovato in soffitta una vecchia foto dei tempi della scuola, che ritrae se stesso, la sua fidanzata Claire Petiblanco e Von Kernel, un tempo suo amico.

Il loro gioco favorito era disporsi sul bordo della piazza della scuola, un quadrato di lato $100m$, in modo da essere tutti e tre alla stessa distanza l'uno dall'altro.

Calcolare la differenza tra le aree dei due triangoli, quello di area massima e quello di area minima, di vertici i tre compagni.

20. I dieci saggi

Il nostro eroe Polinomia Jones è finalmente giunto alla misteriosa città mistica di Agarthi. Alla porta egli trova ad attenderlo i dieci saggi. Per poter ottenere il privilegio di entrare nella città, Polinomia Jones dovrà indovinare un numero intero N attraverso le parole dei saggi.

- ★ Il primo saggio dichiara: *Almeno una delle ultime due dichiarazioni è vera.*
- ★ Il secondo saggio dichiara: *Questa è la prima vera oppure la prima falsa dichiarazione.*
- ★ Il terzo saggio dichiara: *Ci sono tre dichiarazioni false consecutive.*
- ★ Il quarto saggio dichiara: *La differenza tra il numero dell'ultima dichiarazione vera e il numero della prima dichiarazione vera è un fattore di N .*
- ★ Il quinto saggio dichiara: *La somma dei numeri delle dichiarazioni vere è N .*
- ★ Il sesto saggio dichiara: *Questa non è l'ultima dichiarazione vera.*
- ★ Il settimo saggio dichiara: *Il numero d'ordine di ogni dichiarazione vera è un fattore di N .*
- ★ L'ottavo saggio dichiara: *N è uguale alla percentuale delle dichiarazioni vere.*
- ★ Il nono saggio dichiara: *Il numero dei diversi fattori di N (non necessariamente primi, ma diversi da 1 e N) è maggiore della somma dei numeri delle dichiarazioni vere.*
- ★ Infine il decimo saggio dichiara: *Non ci sono tre dichiarazioni consecutive vere.*

Qual è il numero N ?