VI GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale B – 6 maggio 2005

Istruzioni Generali

Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

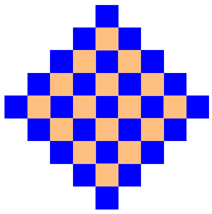
$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2360 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

10 minuti dall'inizio: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
30 minuti dall'inizio: termine ultimo per fare domande sul testo.
90 minuti dall'inizio: termine della gara.

Problema 1.
Si consideri un dodecagono regolare di vertici $A_1A_2\ldots A_{12}$ e lato di lunghezza 13. Tracciando i segmenti A_1A_6, A_5A_{10} e A_9A_2 si formano quattro triangoli all'interno del dodecagono. Calcolare la somma delle aree di questi quattro triangoli.

Problema 2.
Su una scacchiera del tipo in figura (ma la riga centrale ha 21 caselle), quanti modi ci sono per andare dalla casella centrale a un bordo in esattamente n mosse, muovendo ogni volta in una casella adiacente orizzontalmente o verticalmente?

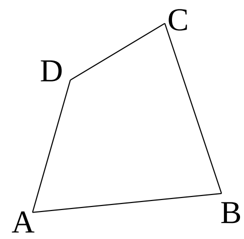


Problema 3.
Un *ultraprimo* è un numero primo tale che, permutando le sue cifre, il numero ottenuto rimane primo. Qual è il più grande numero di 3 cifre ultraprimo?

Problema 4.
Un parallelepipedo di lati 150, 84 e 105 è fatto da cubetti di lato 1. Quanti cubetti vengono attraversati, al loro interno, dalla diagonale del parallelepipedo?

Problema 5.
I 2005 partecipanti ad un torneo di basket vogliono dividersi in 401 squadre, di 5 giocatori ognuna, per giocare ad un torneo. Scrivere le ultime 2 cifre del numero di modi diversi in cui possono dividersi.

Problema 6.
Siano dati un triangolo ABC isoscele in C e un punto A' sul lato AC tale che il triangolo $AA'B$ sia isoscele in B. Siano poi B' un punto sul lato BC e C' il punto di intersezione tra AB' e $A'B$. Sapendo che anche i triangoli ABB', $AB'C$ e $A'BC$ sono isosceli, calcolare il valore (in gradi) dell'angolo $\widehat{A'C'B'}$.



Problema 7.
Il quadrilatero $ABCD$ in figura ha gli angoli $\widehat{ABD} = 30°$, $\widehat{DBC} = 50°$, $\widehat{BCA} = 60°$ e $\widehat{ACD} = 20°$. Quanto misura l'angolo $\widehat{CAD}$?

Problema 8.
Dati 5 rettangoli, in quante parti finite, al massimo, possono dividere il piano?

Problema 9.
Andrea, Bernardo e Chiara vogliono dividersi un pacchetto di caramelle. Il pacchetto contiene 9 caramelle alla fragola, 9 al limone e 9 alla menta. In quanti modi è possibile distribuire le 27 caramelle (anche in parti non uguali) tra i tre, in modo che ognuno abbia caramelle di esattamente due tipi?

Problema 10.
Quante sono le coppie ordinate di interi (a,b) per cui

$$a^4 + 4b^4 + 12ab - 9$$

è un numero primo?

Problema 11.
Calcolare il resto della divisione di $3^{2^{10}}$ per 2^{13}

Problema 12.
Sia dato un triangolo rettangolo in cui l'incentro è equidistante dal vertice dell'angolo retto e dal punto medio dell'ipotenusa. Sapendo che l'ipotenusa misura 1000, calcolare il cateto maggiore del triangolo.

Problema 13.
Trovare il massimo intero positivo che non può essere espresso nella forma $23k + 17h$, con h, $k \geq 0$.

Problema 14.
Un piastrellista vuole ricoprire una stanza rettangolare 462×390 con piastrelle rettangolari di misura $c \times d$. Per quante coppie (ordinate) di dimensioni (c,d) questo è possibile?

Problema 15.
Da un pezzo di stoffa lungo $140\,cm$ e largo $70\,cm$ si vogliono ricavare due semicerchi in modo da utilizzare più stoffa possibile. Qual è l'area totale della stoffa utilizzata?