

# VII GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale A – 5 maggio 2006

## Istruzioni Generali

- ★ Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- ★ Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.

## Scadenze importanti

- ★ **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- ★ **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo.
- ★ **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

### 1. Alla lezione di divinazione

Hardy e Ron sono stati di nuovo pizzicati a chiacchierare durante la noiosa lezione di divinazione. Per punizione devono risolvere un esercizio: data la sequenza 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, ..., formata da tutti gli interi positivi che non sono né quadrati né cubi di altri interi, vaticinare il 2006-esimo termine.

### 2. La prima prova del torneo

Finalmente è giunto il gran giorno del torneo TreAngoli, che mette a confronto i migliori studenti di matematica. Ecco la prima prova: trovare quante sono le coppie  $(a, b)$  di interi positivi tali che  $a \leq 222$  e  $\frac{a}{2} < b < \frac{2}{3}a$ .

### 3. La costruzione del malandrino

L'unico modo per rendere visibile ciò che è stato scritto sulla costruzione del malandrino consiste nel risolvere un problema geomantico: in un triangolo  $ABC$  le lunghezze dei lati uscenti da  $A$  sono 1358 e 2006, e la mediana uscente da  $A$  ha lunghezza 1358. Qual è la lunghezza di  $BC$ ?

### 4. Successioni

Per una strana, matematica coincidenza, nel Medio Evo il direttore della Scuola Matematica Superiore è stato nominato solo negli anni con la seguente peculiare proprietà: sono stati tutti gli anni  $N$  tra il 476 e il 1492 per cui l'equazione  $x^4 - y^4 = N$  ha soluzione negli interi positivi. Qual è la somma di questi anni?

### 5. Distrazioni

Henri e Smale Perelman, i due fratelli più grandi di Ron, raramente seguono le lezioni e piuttosto si dedicano a inventare nuovi giochi. Oggi giocano a chi indovina per primo il seguente quesito: dire quante sono le frazioni  $\frac{m}{n}$ , ridotte ai minimi termini, tali che  $0 < \frac{m}{n} < 1$  e per cui  $m \cdot n = 20!$ .

### 6. Selezione della rosa

Il Quamditch è uno sport che coniuga scatto, agilità e potenza tanto di pensiero che di azione. Per questo Hardy, capitano della squadra di Quamditch della casa di *Rapportareo*, sottopone gli aspiranti matematici atleti alla seguente prova: mentre eseguono una tripla capriola carpiata, devono considerare tutte le coppie ordinate di interi positivi  $(a, b)$  tali che  $a^2 + b^2 = 1105$ . Qual è la somma dei diversi valori di  $a$ ?

### 7. La pozione Polifattore

La preparazione di certe pozioni è lunga ed elaborata, impresa solo per matematici esperti. L'abile Hermita è intenta a preparare la pozione Polifattore: essa richiede un certo numero di sanguisughe. Tale numero  $P$  è il prodotto di tutti i divisori positivi di 1 500 000 (incluso lo stesso 1 500 000). Con quanti zeri termina  $P$ ?

**8. Impostori svelati**

Spesso ci si chiede come sia possibile riconoscere un matemago da un *matebbano*, cioè qualcuno a digiuno di matematica. Il metodo è molto semplice! Provate a chiedere a un matebbano il seguente quesito.

In un triangolo  $ABC$ , retto in  $A$ , siano  $AB = 7$  e  $AC = 24$ . Sia  $P$  l'intersezione tra l'altezza da  $A$  e la mediana da  $B$ . Determinare  $AP$ . Rispondere con la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

**9. La giratempo**

La valente Hermita è piuttosto confusa dall'uso della *Giratempo*, che le permette di viaggiare nel tempo. Dunque si ritrova costretta a tenere spesso d'occhio l'orologio. Sia  $N$  il numero di volte che, in una settimana, la lancetta dei secondi sorpassa la lancetta dei minuti. Quanto vale  $N$ ?

**10. Alla lezione di geomanzia**

Hardy e Hermita sono nel laboratorio di geomanzia, per esercitarsi a creare simboli magici. Partendo da una circonferenza su cui segnano sei punti equidistanti, Hermita propone di completare la figura unendo i sei punti a formare una stella di David, di area  $A$ . Hardy invece propone di unirli ad esagono, di area  $B$ . Per misurare la potenza dei due incantesimi, i due misurano le due aree. Dire quanto vale  $360B/A$ .

**11. La seconda prova del torneo**

I concorrenti al temibile torneo TreAngoli che hanno superato la prima prova si trovano ora ad affrontare la seconda. Devono trovare il più piccolo numero di esattamente 4 cifre tale per cui, sommando le ultime quattro cifre del suo quadrato al numero iniziale, si ottenga 10000.

**12. Agognata libertà**

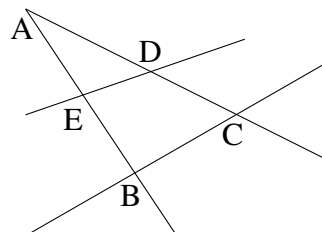
Come tutti i matemaghi sanno, un alfo domestico può riconquistare la sua libertà se riesce a risolvere un problema che gli pone il suo padrone. Recentemente un alfo si è visto chiedere qual è il più piccolo numero intero di 4 cifre distinte e non nulle tale che ogni sua cifra (ad eccezione della prima e dell'ultima) sia strettamente maggiore della media aritmetica delle due cifre adiacenti.

Qual è la risposta che restituisce la libertà all'alfa?

**13. La capanna del guardacaccia**

Hardy, Ron e Hermita amano trascorrere il pomeriggio davanti a una tazza fumante di tè in compagnia del guardacaccia. In queste occasioni la meticolosa Hermita ha sempre un nuovo problema di geomanzia, la sua materia preferita, da proporre agli amici.

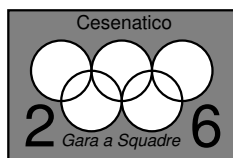
I punti  $B, C, D, E$  giacciono sulla stessa circonferenza e sia  $A$  l'intersezione tra la retta  $BE$  e la retta  $CD$  (vedere figura). Sappiamo che  $DE = AE$  e che  $\widehat{ACB} = 40^\circ$ . Determinare  $\widehat{DAE}$ .

**14. Il collezionista**

Il professor Primon fa una strana collezione di manufatti di matematica oscura. Si tratta di tetraedri regolari che hanno facce tutte colorate di un solo colore (diverso per ogni faccia), e i colori vengono scelti da una gamma di 20 colori diversi. Il professor Primon possiede già un elemento di questa collezione e ne compra un altro, poi torna a casa lo capovolge, lo ruota sulla base, e si accorge che in realtà è un doppione. Quanti pezzi conta in totale la collezione (due pezzi ottenibili l'uno dall'altro mediante rotazioni, sono da considerarsi lo stesso)?

**15. L'ultima prova del torneo**

La fine del torneo TreAngoli è vicina, e presto si saprà il nome del matemago supremo, colui che sarà ricordato per le ere a venire. Solo una prova separa Hardy dal meritato trionfo: determinare quanto vale la somma dei quadrati delle radici del polinomio  $x^3 - 46x^2 + 55x - 7$ .



## VII GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale A – SOLUZIONI – 5 maggio 2006

Nr.	Problema	Soluzione
1	Alla lezione di divinazione	<b>2060</b>
2	La prima prova del torneo	<b>4033</b>
3	La costruzione del malandrino	<b>2088</b>
4	Successioni	<b>8383</b>
5	Distrazioni	<b>0128</b>
6	Selezione della rosa	<b>0168</b>
7	La pozione Polifattore	<b>0210</b>
8	Impostori svelati	<b>2437</b>
9	La giratempo	<b>9912</b>
10	Alla lezione di geomanzia	<b>0540</b>
11	La seconda prova del torneo	<b>9375</b>
12	Agognata libertà	<b>1342</b>
13	La capanna del guardacaccia	<b>0070</b>
14	Il collezionista	<b>9690</b>
15	L'ultima prova del torneo	<b>2006</b>