Unione Matematica Italiana
Scuola Normale Superiore
MIUR

6 Febbraio 2018

Gara Nazionale Classi Prime 2018

Problemi

In questa lista di problemi la risposta corretta è sempre la **A**. *Ovviamente nelle 36 versioni del test che sono state fornite ai responsabili locali per la gara, sia le risposte che i problemi erano permutati in modo casuale.*

In questa lista i problemi non sono in ordine di difficoltà, ma comunque abbiamo marcato quelli che secondo noi erano i più semplici col simbolo $\mathcal{F}$.

Per la Commissione Olimpiadi: Emanuele Callegari.

1. $\mathcal{F}$ L'espressione $\sqrt{4^{201}-2^{401}-2^{400}}$ vale:

$\boxed{A}$ 2^{200} $\boxed{B}$ 2^{20} $\boxed{C}$ 2^{100} $\boxed{D}$ 4^{200} $\boxed{E}$ 4^{101} $\boxed{F}$ nessuna delle altre risposte è esatta

2. $\mathcal{F}$ L'alfabeto marziano è composto solo da 3 lettere e le parole sono lunghe al massimo 5 lettere (che possono essere anche tutte uguali). Quante sono al massimo le parole dei Marziani?

$\boxed{A}$ 363 $\boxed{B}$ 125 $\boxed{C}$ 150 $\boxed{D}$ 151 $\boxed{E}$ 315 $\boxed{F}$ 381

3. $\mathcal{F}$ È dato un polinomio $p(x)$ del tipo:

$$p(x) = x^{10} + x^9 + \text{termini di grado inferiore}.$$

Qual è il grado di $(p(x))^2 - p(x^2)$?

$\boxed{A}$ 19 $\boxed{B}$ 20 $\boxed{C}$ 18 $\boxed{D}$ 40 $\boxed{E}$ non determinabile senza conoscere anche i termini di grado inferiore $\boxed{F}$ nessuna delle altre risposte è esatta

4. $\mathcal{F}$ Partendo da un triangolo $\mathcal{T}_0$ costruisco il triangolo $\mathcal{T}_1$ che ha per vertici i punti medi dei lati di $\mathcal{T}_0$. Allo stesso modo costruisco $\mathcal{T}_2$ a partire da $\mathcal{T}_1$. Proseguo allo stesso modo fino ad arrivare a $\mathcal{T}_6$. Se $\mathcal{T}_6$ ha area $1\,\text{cm}^2$ e indichiamo con s l'area di $\mathcal{T}_0$ espressa in cm^2, allora:

$\boxed{A}$ $1000 < s \leq 5000$ $\boxed{B}$ $s \leq 40$ $\boxed{C}$ $40 < s \leq 200$ $\boxed{D}$ $200 < s \leq 1000$ $\boxed{E}$ $s > 5000$ $\boxed{F}$ non determinabile univocamente dai soli dati forniti, in quanto dipende dalla forma del triangolo

5. $\mathcal{F}$ Dati i 3 numeri $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt[3]{26}$ e $c = 2,9$ allora si ha:

$\boxed{A}$ $a < c < b$ $\boxed{B}$ $a < b < c$ $\boxed{C}$ $b < a < c$ $\boxed{D}$ $b < c < a$ $\boxed{E}$ $c < a < b$ $\boxed{F}$ $c < b < a$

6. $\mathcal{F}$ Sull'isola *Kenoncè* si sta diffondendo rapidamente un'epidemia di influenza: ogni 24 giorni il numero di malati si ottuplica. Se il 6 febbraio 2018 i malati sono 200000, in quale data erano stati 100000?

$\boxed{A}$ 29 gennaio $\boxed{B}$ 31 gennaio $\boxed{C}$ 2 febbraio $\boxed{D}$ 25 gennaio $\boxed{E}$ 27 gennaio $\boxed{F}$ 17 gennaio

7. $\mathcal{F}$ Per la gita scolastica la classe 2^aD noleggia un autobus. Il prezzo complessivo dell'autobus è fisso e non dipende dal numero di partecipanti. I ragazzi decidono di dividere la spesa in parti uguali tra tutti gli alunni della classe. Tuttavia, al momento di dare l'adesione, due ragazzi si ritirano e questo fa aumentare il prezzo pro capite dell'8%, rispetto a quello che sarebbe stato se fossero andati tutti.
Quanti sono in tutto gli alunni della 2^aD?

$\boxed{A}$ 27 $\boxed{B}$ 26 $\boxed{C}$ 25 $\boxed{D}$ più di 27 $\boxed{E}$ meno di 24 $\boxed{F}$ 24

8. $\mathcal{F}$ Siano $p(x) = x^{20}+x^{19}+\ldots+x^2+x+1$ e $q(x) = x^{10}+x^9+\ldots+x^2+x+1$. Qual è il termine di grado 6 di $p(x)\cdot q(x)$ dopo aver sommato tra loro tutti i termini simili?

$\boxed{A}$ $7x^6$ $\boxed{B}$ $2x^6$ $\boxed{C}$ $36x^6$ $\boxed{D}$ $3x^6$ $\boxed{E}$ $49x^6$ $\boxed{F}$ $37x^6$

9. Una retta taglia un rettangolo $\mathcal{R}$ in 2 parti rettangolari di area 40 e 60. Tagliando ulteriormente $\mathcal{R}$ lungo una sua diagonale si ottengono complessivamente 4 parti. Qual è l'area della parte più piccola?

$\boxed{A}$ 8 $\boxed{B}$ 10 $\boxed{C}$ 12 $\boxed{D}$ 4 $\boxed{E}$ 20 $\boxed{F}$ i dati sono insufficienti perché la risposta dipende dalla forma del rettangolo

10. Del polinomio $p(x)$ sappiamo che

$$(x^6 - 3x - 1)\cdot p(x) = x^{17} - x^{11} - 6x^7 - 4x^6 - 9x^2 + 1.$$

Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$?

$\boxed{A}$ 6 $\boxed{B}$ -6 $\boxed{C}$ 3 $\boxed{D}$ -3 $\boxed{E}$ 2 $\boxed{F}$ -2

11. Tra tutte le possibili liste di 10 numeri che posso ottenere scrivendo, in ordine qualsiasi, tutti i numeri da 1 a 10, quante sono quelle nelle quali la somma dei numeri che occupano le posizioni pari è uguale alla somma di quelli che occupano le posizioni dispari?

$\boxed{A}$ 0 $\boxed{B}$ 10 $\boxed{C}$ 2 $\boxed{D}$ 28800 $\boxed{E}$ 120 $\boxed{F}$ 14400

12. Dato un quadrato $ABCD$ di area 1600, si consideri la circonferenza passante per i punti C e D e tangente al lato AB. Qual è il suo diametro?

$\boxed{A}$ 50 $\boxed{B}$ 48 $\boxed{C}$ 44 $\boxed{D}$ 49 $\boxed{E}$ 42 $\boxed{F}$ 60

13. Quanti sono i divisori positivi di 99^9 che sono dei quadrati o dei cubi perfetti?

$\boxed{A}$ 70 $\boxed{B}$ 55 $\boxed{C}$ 90 $\boxed{D}$ 99 $\boxed{E}$ 36 $\boxed{F}$ 120

14. Un piccolo pianeta ha la forma di ottaedro regolare col lato di 720 chilometri. L'unico abitante del pianeta si trova nel punto medio di uno degli spigoli e vuole recarsi nel punto medio dello spigolo diametralmente opposto a quello su cui si trova camminando sulla superficie del pianeta. Qual è il minimo numero di chilometri che deve percorrere?

$\boxed{A}$ 1080 $\boxed{B}$ 1440 $\boxed{C}$ 900 $\boxed{D}$ 720 $\boxed{E}$ 960 $\boxed{F}$ 1200

15. Luca e Claudia devono dividersi una tavoletta rettangolare di cioccolato composta da 7 righe di 12 quadrettoni ciascuna. A turno ciascuno dei due spezza ciò che rimane della tavoletta in due parti, con un taglio orizzontale o verticale che lascia intatto ogni singolo quadretto, mangia una delle due parti e restituisce all'avversario l'altra. Perde chi riceve dall'avversario un pezzo di un solo quadretto.
Se inizia Claudia, quanti quadretti deve mangiare con la prima mossa per essere sicura che, comunque risponda Luca, sarà lei a vincere?

$\boxed{A}$ 35 $\boxed{B}$ 63 $\boxed{C}$ 42 $\boxed{D}$ 48 $\boxed{E}$ qualunque cosa Claudia faccia, sarà Luca a vincere $\boxed{F}$ Claudia può vincere in più modi, mangiando diverse quantità di quadretti

16. Un piccolo verme entra in una grossa mela sferica dal raggio di 10 cm e ne esce dopo aver percorso al suo interno un tragitto (non necessariamente rettilineo) di lunghezza d. Trovare la massima lunghezza ℓ tale che, qualunque sia la forma del percorso del verme, se $d < \ell$ si riesce comunque a tagliare la mela (con un taglio piano) in due parti uguali, delle quali una è completamente sana.

$\boxed{A}$ $\ell = 20\,\text{cm}$ $\boxed{B}$ $\ell = 10\,\text{cm}$ $\boxed{C}$ $\ell = 10\pi\,\text{cm}$ $\boxed{D}$ $\ell = 5\pi\,\text{cm}$ $\boxed{E}$ $\ell = \frac{10\pi}{3}\,\text{cm}$ $\boxed{F}$ $\ell = \frac{20\pi}{3}\,\text{cm}$

17. Si consideri il numero $201820172016\ldots10987654321$ ottenuto disponendo uno accanto all'altro, in ordine decrescente, tutti gli interi da 2018 ad 1. Che resto si ottiene dividendo tale numero per 6?

$\boxed{A}$ 3 $\boxed{B}$ 0 $\boxed{C}$ 1 $\boxed{D}$ 2 $\boxed{E}$ 4 $\boxed{F}$ 5

18. Un quadrato di cartoncino di area $36\,\text{cm}^2$ viene tagliato con le forbici in 6 pezzi. Sappiamo che ciascuno dei 6 pezzi ha la forma di un quadrato.
Qual è, espressa in cm^2, l'area del pezzo che ha area massima?

$\boxed{A}$ 16 $\boxed{B}$ 12 $\boxed{C}$ 18 $\boxed{D}$ 31 $\boxed{E}$ è impossibile che tutti e 6 i pezzi siano dei quadrati $\boxed{F}$ le informazioni sono insufficienti perché esistono più modi di suddividere il quadrato assegnato in 6 quadrati

Soluzioni

Qui di seguito trovate le soluzioni in forma scritta. Alcune soluzioni in forma di video verranno successivamente pubblicate sul canale YouTube:

problemisvolti.it

Soluzione del Quesito 1.

La risposta corretta è: 2^{200}.
Infatti:

$$\sqrt{4^{201}-2^{401}-2^{400}} = \sqrt{4\cdot 4^{200}-2\cdot 2^{400}-2^{400}} = \sqrt{4\cdot 2^{400}-2\cdot 2^{400}-2^{400}} = \\ = \sqrt{(4-2-1)\cdot 2^{400}} = \sqrt{2^{400}} = 2^{200}$$

Soluzione del Quesito 2.

La risposta corretta è: 363.
Infatti con un alfabeto di 3 lettere, le parole di una lettera sono 3, le parole di 2 lettere sono 3^2 e, in generale, le parole di n lettere sono 3^n. Quindi le parole che hanno lunghezza non superiore a 5 lettere sono:

$$3+3^2+3^3+3^4+3^5 = 363.$$

Si noti che in questo modo abbiamo contato tutte le possibili parole intese come *striscie di lettere*, anche senza senso, le parole vere e proprie (=*striscie di lettere con senso*) potrebbero essere 363 ma potrebbero anche essere di meno. Tuttavia non sarano mai più di 363, che quindi è il massimo numero di parole possibile.

Soluzione del Quesito 3.

La risposta corretta è: 19.
Osserviamo che:

$$(1) \qquad p(x^2) = x^{20}+x^{18} + \text{termini di grado non superiore a 16.}$$

Invece:

$$(2) \qquad \begin{aligned} (p(x))^2 &= \left(x^{10}+x^9+\text{termini di grado inferiore}\right)^2 = \\ &= x^{20}+2x^{10}x^9+\text{termini di grado non superiore a 18} \end{aligned}$$

Quindi (1) e (2) hanno lo stesso termine di grado 20, ma solo (2) ha un termine di grado 19.
Ciò significa che la loro differenza ha grado 19.

Soluzione del Quesito 4.

La risposta corretta è: $1000 < s \leq 5000$.
Basta osservare che, dato un triangolo qualsiasi, unendo i 3 punti medi dei suoi lati lo si suddivide in 4 triangoli uguali tra loro.
Quindi per ogni intero positivo n si ha:

$$\text{Area di } \mathcal{T}_n = \frac{1}{4}\,\text{Area di } \mathcal{T}_{n-1},$$

che iterata 6 volte a partire da $\mathcal{T}_0$ ci fornisce:

$$\text{Area di } \mathcal{T}_6 = \frac{1}{4^6}\,\text{Area di } \mathcal{T}_0 = \frac{1}{4096}\,\text{Area di } \mathcal{T}_0,$$

dalla quale, ricordando che $\mathcal{T}_6$ ha area unitaria, ricaviamo subito che l'area di $\mathcal{T}_0$ è di $4096\,\text{cm}^2$.

Soluzione del Quesito 5.

La risposta corretta è: $a < c < b$.
Per mostrare che $a < c$ senza ricorrere alla calcolatrice (che ovviamente in gara non è ammessa) la cosa più comoda è verificare non che $\sqrt{8} < 2,9$ ma che $8 < (2,9)^2$, cosa che è presto fatta visto che un rapido calcolo mostra che $(2,9)^2 = 8,41$.
Analogamente, per mostrare che $c < b$ basta verificare che $(2,9)^3 < 26$. In questo caso, pur essendo comunque abbastanza rapido calcolare a mano che $(2,9)^3 = 24,389$, la cosa più rapida è osservare che:

$$(2,9)^3 = \left(3-\frac{1}{10}\right)^3 = 27-\frac{27}{10}+\frac{9}{100}-\frac{1}{1000} = \\ = 25-\frac{7}{10}+\frac{9}{100}-\frac{1}{1000} < 25 < 26.$$

Soluzione del Quesito 6.

La risposta corretta è: 29 gennaio.
Infatti se i malati ottuplicano ogni 24 giorni significa che raddoppiano ogni 8 giorni. Ma allora, se sono 200000 il 6 febbraio, la data in cui erano 100000 era necessariamente 8 giorni prima, cioè il 29 gennaio.

Soluzione del Quesito 7.

La risposta corretta è: 27.
La nostra incognita è n, il numero complessivo degli studenti della 2^a D.
Sappiamo che se il numero di studenti passa da n a $n-2$, il prezzo pro capite p aunenta dell'8%, cioè viene moltiplicato per $1,08$.
Siccome moltiplicando il prezzo pro capite per il numero di studenti paganti si ottiene sempre il prezzo complessivo avremo che:

$$n\cdot p = (n-2)\cdot p\cdot 1,08$$

Dividendo ambo i membri per p si ottiene:

$$n = 1,08\cdot(n-2)$$

da cui, esplicitando rispetto a n, si ottiene $n = 27$.

Soluzione del Quesito 8.

La risposta corretta è: $7x^6$.
I termini di grado 6 nel polinomio prodotto sono tutti e soli quelli che ottengo moltiplicando ogni termine di grado k di $p(x)$ con il corrispondente termine di grado $6-k$ di $q(x)$, con k intero che varia tra 0 e 6, cioè:

$$x^6\cdot 1+x^5\cdot x+x^4\cdot x^2+x^3\cdot x^3+x^2\cdot x^4+x\cdot x^5+1\cdot x^6,$$

che danno appunto $7x^6$.

Soluzione del Quesito 9.

La risposta corretta è: 8.
Sappiamo che (vedi figura) le aree di $ABQP$ e $PQCD$ sono rispettivamente 60 e 40.

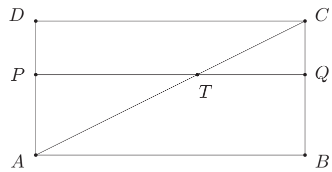

figura 1

Di conseguenza

$$BQ : QC = 60 : 40$$

e quindi $CQ = \frac{2}{5}\cdot CB$.

Ma allora il rapporto tra le aree dei triangoli simili CQT e CBA è $\left(\frac{2}{5}\right)^2$.
Possiamo quindi concludere che:

$$\text{area di } CQT = \frac{4}{25}\,\text{area di } CBA = \frac{4}{25}\cdot\frac{40+60}{2} = 8.$$

Soluzione del Quesito 10.

La risposta corretta è: 6.
Il problema può essere affrontato con la forza bruta, trovando esplicitamente $p(x)$ come risultato della divisione tra polinomi:

$$(x^{17}-x^{11}-6x^7-4x^6-9x^2+1) : (x^6-3x-1).$$

In tal modo, dopo un po' di calcoli noiosi, si trova $p(x) = x^{11}+3x^6+3x-1$, la cui somma dei coefficienti è 6.
Tuttavia è possibile evitare quasi tutti i calcoli se prima si osserva che, comunque si prenda un polinomio $q(x) = a_nx^n+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$, la somma dei suoi coefficienti coincide sempre col numero che si ottiene calcolandolo per $x = 1$.
Infatti:

$$q(1) = a_n\cdot 1^n+\ldots+a_2\cdot 1^2+a_1\cdot 1+a_0 = a_n+\ldots a_2+a_1+a_0.$$

Ciò significa che dobbiamo calcolare $p(1)$ sapendo che

$$(x^6-3x-1)\cdot p(x) = x^{17}-x^{11}-6x^7-4x^6-9x^2+1.$$

Siccome tale uguaglianza vale per ogni valore di x, in particolare vale per $x = 1$ e quindi si ottiene:

$$(1^6-3\cdot 1-1)\cdot p(1) = 1^{17}-1^{11}-6\cdot 1^7-4\cdot 1^6-9\cdot 1^2+1,$$

cioè

$$-3 \cdot p(1) = -18,$$

da cui segue $p(1) = 6$.

Quindi la somma dei coefficienti di $p(x)$ è 6.

Soluzione del Quesito 11.

La risposta corretta è: 0.

Infatti la somma dei numeri da 1 a 10 è 55, che è dispari, quindi non c'è modo di dividere tale insieme in due sottoinsiemi di interi che abbiano la stessa somma.

Soluzione del Quesito 12.

La risposta corretta è: 50.

Per motivi di simmetria il punto di tangenza P della circonferenza sul lato AB deve essere il punto medio del lato.

Inoltre, sempre per motivi di simmetria, se con Q indichiamo il punto medio di CD, la retta PQ passa per il centro della circonferenza.

Di conseguenza PT è un diametro, il triangolo PTD è rettangolo in D e DQ è l'altezza relativa all'ipotenusa, come si può osservare in figura.

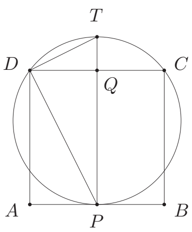

figura 2

Dalla similitudine dei triangoli rettangoli DQP e TDQ segue che:

$$QP : DQ = DQ : QT$$

cioè:

$$40 : 20 = 20 : QT.$$

Quindi $QT = 10$ e $PT = 40 + 10 = 50$.

Soluzione del Quesito 13.

La risposta corretta è: 70.

Si ha:

$$n = 99^9 = 3^{18} \cdot 11^9$$

quindi i suoi divisori che sono quadrati perfetti sono tutti e soli quelli del tipo $3^\alpha \cdot 11^\beta$ con α e β entrambi pari e $\alpha \leq 18$ e $\beta \leq 9$. I casi per α sono 10 e quelli per β sono 5, quindi complessivamente i quadrati perfetti che dividono n sono 50.

In modo del tutto analogo i cubi che dividono n sono tutti e soli quelli del tipo $3^\alpha \cdot 11^\beta$ con α e β entrambi multipli di 3 e $\alpha \leq 18$ e $\beta \leq 9$. Stavolta i casi per α sono 7 e quelli per β sono 4, quindi complessivamente i cubi perfetti che dividono n sono 28.

Tuttavia ci sono divisori che abbiamo contato due volte perché sono sia cubi che quadrati perfetti e precisamente quelli che si ottengono quando α e β sono multipli di 6, cosa che succede per 4 valori di α e 2 valori di β, quindi per complessivi 8 casi.

I divisori che ci interessano sono quindi $50 + 28 - 8$, cioè 70.

Soluzione del Quesito 14.

La risposta corretta è: 1080.

Un ottaedro regolare ha tutte le 8 facce a forma di triangolo equilatero.

Per immaginarlo prendiamo due piramidi identiche, entrambe a base quadrata e con le facce laterali a forma di triangolo equilatero e incolliamole tra loro con le basi: il solido che si ottiene è appunto un ottaedro regolare.

Se indichiamo con $PQRS$ il quadrato che fa da base comune e con T ed U i vertici delle due piramidi, lo sviluppo del tetraedro risulta essere quello indicato in figura, dove abbiamo indicato con M il punto in cui si trova inizialmente l'abitante del pianeta e con N il punto in cui deve recarsi.

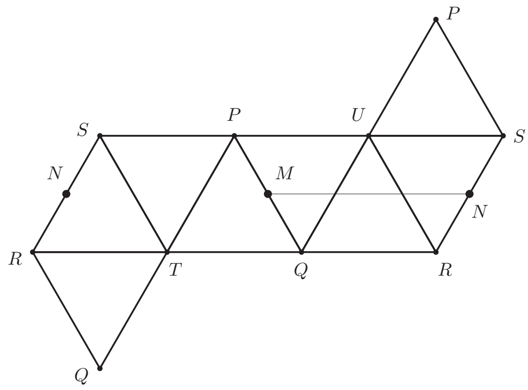

figura 3

Il cammino minimo per andare da M ad N rimanendo sulla superficie del solido è ovviamente quello che nello sviluppo risulta essere rettilineo, cioè il segmento MN, che è banalmente uguale ai $\frac{3}{2}$ dello spigolo e quindi misura 1080 chilometri.

Soluzione del Quesito 15.

La risposta corretta è: 35.

Osserviamo che se uno dei giocatori riceve dall'avversario un pezzo di tavoletta di forma quadrata allora non può vincere, se l'avversario gioca correttamente.

Infatti, qualsiasi mossa farà, si vedrà restituire dall'avversario ancora un pezzo di tavoletta quadrato strettamente più piccolo del precedente e, andando avanti così, alla fine si ritroverà in mano una tavoletta composta da un solo quadretto e quindi avrà perso.

Se ne deduce che chi riceve dall'avversario un pezzo di tavoletta non quadrato riesce a forzare la vittoria restituendo all'avversario un pezzo di tavoletta quadrato.

Quindi l'unico modo che ha Claudia di vincere è di togliere alla tavoletta 12×7, che si ritrova inizialmente in mano, 5 colonne da 7 quadretti, in modo da restituire a Luca una tavoletta 7×7.

Quindi, per vincere, Claudia ha dovuto togliere 35 quadretti.

Soluzione del Quesito 16.

La risposta corretta è: 20 cm.

Ragioniamo prima nel caso bidimensionale (vedi figura **4**): immaginiamo che la mela sia la zona di piano delimitata dalla circonferenza γ e che P e Q siano rispettivamente il punto di entrata e il punto di uscita del verme. Vogliamo mostrare che se un percorso tra P e Q è più corto del diametro allora non può toccare la retta r passante per il centro O e parallela a PQ.

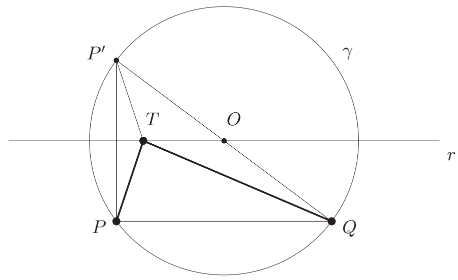

figura 4

Infatti se per assurdo il percorso del verme toccasse la retta r in un punto T, la sua lunghezza sarebbe non minore di quella della spezzata QTP.

Se però indichiamo con P' il simmetrico di P rispetto alla retta r, otteniamo che la spezzata QTP ha la stessa lunghezza di QTP', che a sua volta non è minore di quella del segmento QP', che è necessariamente un diametro di γ in quanto l'angolo $\widehat{QPP'}$ è retto.

Quindi se il percorso del verme toccasse la retta r non potrebbe essere minore del diametro. Ciò significa che se taglio la mia mela bidimensionale lungo la retta r sono sicuro che la mezza mela che non contiene i punti P e Q è integra.

D'altra parte, se il percorso è strettamente più lungo del diametro, il verme potrebbe partire da P, raggiungere il centro, girarci intorno diverse volte (pur di rimanerci molto vicino) e poi tornare verso Q. In tal modo, ogni retta che passa per il centro non può lasciare tutto dalla stessa parte il percorso del verme.

Riassumendo, se indichiamo con d la lunghezza del percorso del verme, se d è minore del diametro allora posso sempre tagliare la mela bidimensionale in due parti in modo che una delle due sia integra, se invece d è maggiore del diametro non sono sicuro di poterlo fare. Ciò significa che il massimo valore ℓ tale che se $d < \ell$ sono sicuro di potermi tagliare mezza mela integra, è proprio la lunghezza

del diametro.
Il caso tridimensionale si affronta in modo simile.
Indichiamo π_1 il piano passante per P, Q e per il centro O della mela sferica e con π_2 il piano perpendicolare a π_1, passante per O e parallelo al segmento PQ.
Senza perdere di generalità possiamo sempre immaginare di ruotare la mela in modo che i punti P e Q si trovino entrambi all'equatore, quindi nella figura **4** la circonferenza γ è l'equatore, la zona di piano che racchiude è l'intersezione tra π_1 e la sfera, mentre r è l'intersezione tra π_2 e π_1.
Anche questa volta l'obiettivo è far vedere che se il percorso del verme arriva a toccare il piano π_2 allora è necessariamente lungo almeno come il diametro della mela.
Infatti se il percorso tocca π_2 la sua proiezione ortogonale sul piano π_1 (che non può essere più lunga del percorso stesso) tocca la retta r e quindi è lunga almeno quanto il diametro, per quanto abbiamo già visto nel caso bidimensionale.
Di conseguenza, se il percorso del verme è più corto del diametro, non può arrivare a toccare il piano π_2 e quindi si può ottenere mezza mela integra tagliandola col piano π_2.
Viceversa, come già visto nel caso piano, se il percorso del verme è strettamente maggiore del diametro, il verme può partire da P, arrivare al centro O, fare molti giri intorno ad O con diverse inclinazioni e infine andare in Q. Quindi potrebbe non essere possibile tagliare la mela con un piano passante per O che lasci il percorso del verme tutto dalla stessa parte.
Quindi, anche nel caso tridimensionale, la massima distanza d cercata è la lunghezza del diametro.

Soluzione del Quesito 17.

La risposta corretta è: 3.
Cominciamo con la seguente osservazione:

> dati due numeri le cui rappresentazioni in base 10 siano $A_1A_2\dots A_n$ e $B_1B_2\dots B_k$, la loro somma è divisibile per 3 se e solo se lo è il numero che si ottiene scrivendoli uno di seguito all'altro, cioè $A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_k$.

La verifica che questo è vero è molto semplice, infatti:

$$\begin{aligned} A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_k &= A_1A_2\dots A_n\overbrace{00\dots0}^{k}+B_1B_2\dots B_k = \\ &= A_1A_2\dots A_n\cdot 10^k + B_1B_2\dots B_k = \\ &= A_1A_2\dots A_n\cdot\overbrace{99\dots9}^{k}+A_1A_2\dots A_n + B_1B_2\dots B_k = \\ &= (\text{multiplo di } 3) + A_1A_2\dots A_n + B_1B_2\dots B_k \end{aligned}$$

Quindi i due numeri $A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_k$ e $A_1A_2\dots A_n + B_1B_2\dots B_k$ differiscono di un multiplo di 3, quindi o sono entrambi divisibili per 3 oppure entrambi non lo sono.
Applicando ripetutamente l'osservazione appena dimostrata possiamo affermare che il numero n (enorme) ottenuto scrivendo di seguito tutti i numeri interi da 2018 a 1 è divisibile per 3 perché

$$1 + 2 + \ldots + 2018 = \frac{2018\cdot 2019}{2} = 1009\cdot 2019 = \text{multiplo di } 3$$

Ma allora, siccome è immediato constatare che n è dispari, dividendolo per 6 otteniamo come resto 3.

Soluzione del Quesito 18.

La risposta corretta è: 16.
Si trova abbastanza facilmente che un possibile modo per dividere un quadrato in 6 quadrati è il seguente:

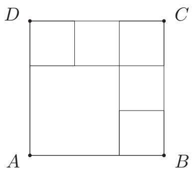

figura 5

dove chiaramente l'area del pezzo più grosso è 16 perché è i $\frac{4}{9}$ del totale.
Per poter concludere rimane da escludere che ci siano altri modi, oltre a quello proposto, di suddividere un quadrato in 6 quadrati.
A tale scopo osserviamo che qualsiasi suddivisione si prenda del quadrato $ABCD$, i quattro vertici dovranno appartenere a 4 pezzi quadrati diversi, i quali però non possono non toccarsi tra loro altrimenti si otterrebbe una configurazione come la seguente:

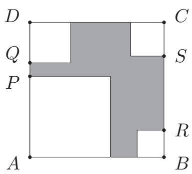

figura 6

dove chiaramente la parte grigia rimasta ha troppi lati per poter essere suddivisa in due pezzi quadrati.
Ciò significa che almeno due dei quadrati bianchi in figura devono toccarsi, in modo da ottenere una figura del tipo:

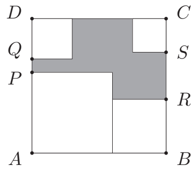

figura 7

Tuttavia anche in questo caso, se i segmenti PQ ed SR sono entrambi segmenti non nulli è impossibile dividere la zona grigia in due quadrati. Infatti l'eventuale pezzo quadrato che contiene il vertice Q deve aver lato PQ e quello che contiene il vertice S deve aver lato SR e quindi non possono bastare a coprire tutta la zona grigia, visto che $PQ + SR < AB$.
Di conseguenza dobbiamo avere una configurazione del tipo:

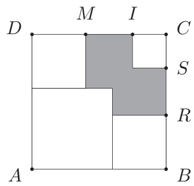

figura 8

Anche stavolta ogni eventuale suddivisione della zona grigia in 2 pezzi quadrati forza tali pezzi ad avere lati MI e SR rispettivamente, quindi la zona grigia può essere la loro unione disgiunta solo se la configurazione è la seguente:

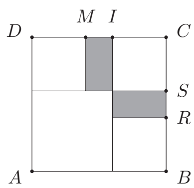

figura 9

Ma le due parti che compongono la zona grigia sono due quadrati solo se $SR = CS = RB$, cioè se ci ritroviamo nella situazione descritta dalla figura **5**, che quindi è l'unica possibile.