Unione Matematica Italiana
Scuola Normale Superiore

Progetto Olimpiadi della Matematica

GARA di FEBBRAIO

22 febbraio 2018

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:__________________ Cognome:____________________ Genere: F M

Indirizzo:______________________________ Città:________________

Scuola:__________________ Anno di corso: 1 2 3 4 5 Città:________________

Email:__________________________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

1. Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.
2. La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3. Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4. I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5. I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6. Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!
7. Per correttezza nei confronti di coloro che facessero la gara in momenti diversi della giornata, ti chiediamo di non diffondere informazioni sul testo e sulle risposte prima delle 20 di questa sera. Grazie!

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Da riempirsi a cura dell'insegnante:

Valutazione esercizi dimostrativi

15	16	17

Punteggio totale
(da foglio di calcolo)

EGMO 2018 in Italia! `http://www.egmo2018.org`
Per essere sempre aggiornati sulle novità del mondo olimpico, visitate il sito internet e il forum:
`http://olimpiadi.dm.unibo.it` `http://www.oliforum.it`

Questa gara non sarebbe stata possibile senza la preziosa collaborazione di tutti coloro che hanno proposto, risolto, modificato e testato i problemi:
Alberto Alfarano, Alessandro Iraci, Alessandro Trenta, Andrea Gallese, Andrea Parma, Bernardo Forni, Camilla Casamento Tumeo, Edoardo Annunziata, Emanuele Tron, Fabio Caceffo, Federica Cecchetto, Federico Glaudo, Federico Poloni, Fedor Getman, Filippo Baroni, Flavio De Vincenti, Francesca Rizzo, Giada Franz, Giona Micossi, Giovanni Barbarino, Giuseppe Romanazzi, Jacopo D'Aurizio, Lorenzo Benedini, Luca Ambrosino, Luca Macchiaroli, Marcello Mamino, Marco Trevisiol, Matteo Protopapa, Matteo Rossi, Nicola Ottolini, Nikita Deniskin, Paolo Leonetti, Riccardo Zanotto, Simone Pelizzola, Veronica Sacchi e Vittoria Ricciuti.

Alessandra Caraceni, Luigi Amedeo Bianchi e Davide Lombardo

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Una gara di matematica consta di 90 domande a risposta multipla. Camilla ha risposto a tutte le domande: quale dei seguenti **non** può essere il punteggio totalizzato da Camilla, sapendo che una risposta corretta vale 5 punti e una risposta sbagliata vale -1 punto?

   (A) -78 **(B)** 116 **(C)** 204 **(D)** 318 **(E)** 402

2. Quante sono le sequenze di numeri di lunghezza otto composte unicamente da 0 e 1 che contengono il codice 01?

   (A) 64 **(B)** 128 **(C)** 192 **(D)** 247 **(E)** 255

3. Sia ABC un triangolo isoscele con base $BC = 10$ e $AB = AC$. Si costruiscano esternamente sui suoi due lati obliqui altri due triangoli isosceli DAB e EAC, entrambi simili ad ABC, con $DA = DB$ e $EA = EC$. Sapendo che $DE = 45$, trovare la lunghezza di AB.

   (A) 15 **(B)** 20 **(C)** $9\sqrt{5}$ **(D)** 22.5 **(E)** Non è possibile determinarlo con i soli dati forniti.

4. Dati due numeri reali positivi a, b definiamo

   $$a \star b = \frac{ab+1}{a+b}.$$

   Quanto vale $1 \star (2 \star (3 \star (\cdots (2017 \star 2018))))$?

   (A) 1/2018 **(B)** 1 **(C)** 2018/2017 **(D)** 1009 **(E)** 2018

5. Veronica osserva che $81 \cdot 3 = 243$ e $81 \cdot 4 = 324$ e si chiede quanti siano i numeri m con $10 \leq m \leq 99$ e tali che $3m = ABC$ e $4m = CAB$, con A, B e C cifre decimali (si considerano validi anche i casi in cui una o più delle cifre A, B, C siano uguali a zero).

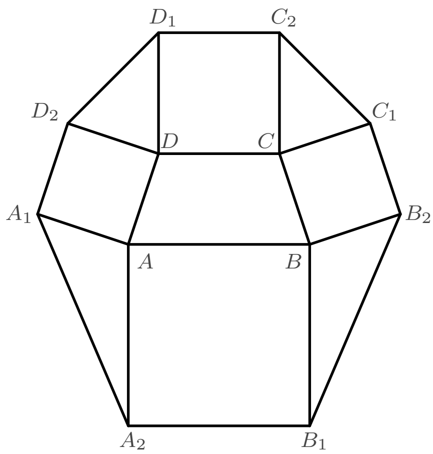
   (A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 6

6. Nel villaggio di Asip tutti gli abitanti appartengono ad uno dei due gruppi seguenti: i Cavalieri, che dicono sempre la verità, e i Furfanti, che mentono sempre. Oggi, per il censimento annuale, è arrivato dalla capitale il Gran Notaio e tutti gli abitanti si mettono in fila indiana davanti a lui. Ciascuno di essi dichiara: "Il numero di coloro che non appartengono al mio gruppo e sono in fila davanti a me è pari". Oltre a questo, i primi tre abitanti nella fila affermano, in ordine, quanto segue: "Nel villaggio ci sono 999 abitanti", "I Cavalieri sono esattamente 666", "Ci sono almeno tre Furfanti ad Asip". Quanti sono i Cavalieri ad Asip?

   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 501 **(D)** 666 **(E)** 997

7. $ABCD$ è un trapezio isoscele con lati di lunghezze $AB = 15$, $BC = DA = 5, CD = 7$. Sui lati di $ABCD$, esternamente ad $ABCD$, vengono costruiti quattro quadrati. Con riferimento alla figura, qual è l'area del poligono $A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2$?

   (A) $297 + 35\sqrt{5}$ **(B)** 396 **(C)** 423 **(D)** $105 + 144\sqrt{5}$ **(E)** $200\sqrt{5}$



8. Annalisa, Bruna e Cecilia giocano a calcio: una di loro sta in porta e le altre in campo. Chi fa gol rimane in campo, mentre chi non ha segnato si scambia con il portiere. Sapendo che Annalisa è stata in campo per 12 turni e Bruna per 21 turni, mentre Cecilia è stata in porta 8 volte, chi ha cominciato in porta?

   (A) Annalisa **(B)** Bruna **(C)** Cecilia **(D)** Annalisa o Bruna (ma sicuramente non Cecilia) **(E)** Può essere una qualunque delle tre amiche.

9. Siano a e b due numeri reali distinti. Si sa che le due equazioni

$$x^2 + ax + 3b = 0$$

$$x^2 + bx + 3a = 0$$

hanno una soluzione in comune: quali sono i possibili valori per la somma $a + b$?

(A) 0 o -3 **(B)** 0 o 3 **(C)** Soltanto 0 **(D)** Soltanto -3 **(E)** Esistono infiniti valori possibili

10. Quante sono le quaterne di interi positivi (a, b, x, y) tali che $x + y = a \cdot b$ e $a + b = x \cdot y$?

(A) 1 **(B)** 5 **(C)** 9 **(D)** 17 **(E)** Infinite

11. Sono date tre circonferenze Γ, Γ_1, Γ_2 di raggi rispettivamente 6, 3, 2. Γ_1 e Γ_2 sono tangenti esternamente in A, mentre Γ tange entrambe le altre circonferenze internamente, rispettivamente in A_1 ed A_2. Determinare il raggio della circonferenza circoscritta ad AA_1A_2.

(A) $2\sqrt{6}$ **(B)** 5 **(C)** $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ **(D)** $4 + \sqrt{3}$ **(E)** 6

12. Per ogni intero positivo n chiamiamo $f(n)$ il prodotto di tutti i numeri naturali dispari minori o uguali a $2n + 1$ (per esempio $f(4) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$). Poniamo poi $g(n) = \frac{n}{f(n)}$. Cosa si può dire della somma $S = g(1) + g(2) + \cdots + g(30)$?

(A) $S \leq 0.35$ **(B)** $0.35 < S \leq 0.49$ **(C)** $0.49 < S \leq 0.50$ **(D)** $0.50 < S \leq 0.51$ **(E)** $S > 0.51$

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Angela ha a disposizione i polinomi $x - 1$, $(x - 1)(x - 2)$, $(x - 1)(x - 2)(x - 3), \ldots$ fino a $(x - 1)(x - 2) \cdots (x - 2017)(x - 2018)$, e li divide in due gruppi. Detto $p(x)$ il prodotto dei polinomi del primo gruppo e $q(x)$ quello dei polinomi del secondo gruppo, Angela si accorge che il polinomio $p(x)$ divide il polinomio $q(x)$, e che il grado del quoziente $\frac{q(x)}{p(x)}$ è il più piccolo possibile: quanto vale tale grado?

14. Consideriamo un orologio digitale e i numeri formati dalle quattro cifre (ore e minuti): le 10:45 indicheranno il numero 1045. Quale è il più piccolo intero positivo che non divide alcuno dei numeri che compaiono fra le 11:00 e le 12:59?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

(a) Trovare tutti gli interi positivi n di due cifre che godano della seguente proprietà: entrambi gli interi che si ottengono cancellando una delle due cifre della rappresentazione decimale di n sono divisori (interi positivi) di n.

(b) Sia $n > 10$ un intero che si scrive con k cifre decimali, tutte diverse da zero. Supponiamo che ciascuno degli interi ottenuti cancellando una delle k cifre della rappresentazione decimale di n sia un divisore (intero positivo) di n. Mostrare che necessariamente $k = 2$.

Esempio. Per $n = 123$ si ha $k = 3$, e gli interi ottenuti cancellando cifre di n sono $23, 13, 12$.

SOLUZIONE:

Nome:________________________ Cognome:________________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Alice e Barbara hanno inventato il seguente gioco. Hanno una griglia 1×2018, con le caselle numerate da 1 a 2018 da sinistra verso destra, e 2018 tessere numerate anch'esse da 1 a 2018. La partita inizia con la griglia vuota, e le due giocatrici si alternano nel fare mosse; la giocatrice di turno può scegliere fra:

- selezionare una tessera non ancora collocata sulla griglia e porla su una casella libera, a patto che i numeri sulle tessere collocate, se letti da sinistra verso destra, siano in ordine crescente;
- selezionare una tessera già collocata sulla griglia e spostarla in una casella adiacente in modo che la tessera si avvicini alla casella che reca lo stesso numero della tessera, a patto che la casella di arrivo sia libera (esempio: se la tessera col numero 7 si trova sulla casella numero 12, la si può spostare a sinistra, ma non a destra; se invece una tessera si trova già nella casella col suo stesso numero, non potrà più essere spostata).

(a) Dimostrare che a ogni turno, se le tessere non sono tutte sulla griglia, esiste una mossa lecita.

(b) Se inizia Alice e vince chi colloca l'ultima tessera, chi ha una strategia vincente?

SOLUZIONE:

Nome:____________________________Cognome:________________________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Siano ABC un triangolo e P un suo punto interno. Sia H il punto sul lato BC tale che la bisettrice dell'angolo $\widehat{AHP}$ è perpendicolare alla retta BC. Sapendo che $\widehat{ABC} = \widehat{HPC}$ e $\widehat{BPC} = 130^o$, determinare la misura dell'angolo $\widehat{BAC}$.

SOLUZIONE:

Nome:________________________ Cognome:______________________________

Soluzione dei Quesiti

1. La risposta è **(B)**. Sia r il numero di risposte corrette date da Camilla; per differenza, il numero di risposte sbagliate è $90 - r$, e il punteggio totale è $5r + (-1)(90 - r) = 6r - 90 = 6(r - 15)$. Ne segue che il punteggio di Camilla è multiplo di 6, e quindi non può essere uguale a $116 = 2^2 \cdot 29$, in quanto questo numero non è divisibile per 3. Tutti gli altri punteggi sono possibili: Camilla può totalizzare $-78, 204, 318$ e 402 punti dando rispettivamente $2, 49, 68$ e 82 risposte corrette; in effetti, il punteggio di Camilla può essere qualsiasi numero multiplo di 6 compreso fra $6 \cdot (0 - 15) = -90$ e $6 \cdot (90 - 15) = 450$.

2. La risposta è **(D)**. Il numero di stringhe di lunghezza 8 formate di cifre 0 e 1 è 2^8; contiamo quelle che *non* contengono il codice 01. Ci si rende facilmente conto che se una tale stringa contiene almeno uno 0, allora tutte le cifre a destra di quello 0 sono a loro volta uguali a 0: in caso contrario, infatti, il primo 1 che compare dopo quello 0 è necessariamente preceduto dalla cifra 0, e abbiamo dunque trovato una sottostringa uguale a 01. Otteniamo quindi che una stringa che non contiene il codice 01 è formata da un blocco iniziale di cifre 1, diciamo di lunghezza k, seguito da un blocco di lunghezza $8 - k$ di cifre 0; al variare di k fra 0 e 8, si ottengono le 9 stringhe della forma descritta, ovvero 11111111, 11111110, 11111100, 11111000, 11110000, 11100000, 11000000, 10000000 e 00000000. La risposta al problema è quindi $2^8 - 9 = 256 - 9 = 247$.

3. La risposta è **(A)**. Poiché i triangoli ABC, DAB, EAC sono simili, si ha che i rispettivi angoli alla base sono congruenti; questo significa che $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{CAE}$. Adesso si può calcolare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{DAE} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = \widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180°$, cioé D, A, E sono allineati. I triangoli DAB e EAC sono simili, e le loro basi AB, AC hanno la stessa lunghezza, quindi essi sono anche congruenti e $DA = EA$; questo, unito all'allineamento di D, A, E, porta a $DA = \frac{DE}{2}$. Dalla similitudine di DAB e ABC sappiamo che i loro lati sono in proporzione, quindi $\frac{DA}{AB} = \frac{AB}{BC}$ ovvero $AB^2 = DA \cdot BC$ e quindi
$$AB = \sqrt{DA \cdot BC} = \sqrt{\frac{DE \cdot BC}{2}} = \sqrt{\frac{45 \cdot 10}{2}} = 15.$$

4. La risposta è **(B)**. Si può osservare che per qualunque numero reale positivo x si ha $1 \star x = \frac{1 \cdot x + 1}{1 + x} = 1$; prendendo come x il valore $2 \star (3 \star (\cdots (2017 \star 2018)))$ si ottiene che la risposta al problema è $1 \star x = 1$.

5. La risposta è **(C)**. Poiché $3m = ABC$ è ovviamente un multiplo di 3, tale è la somma delle sue cifre $A + B + C$. Inoltre, sappiamo che $3m = 100A + 10B + C$ e che $4m = 100C + 10A + B$; per differenza, dunque, $m = 99C - 9B - 90A = 9(11C - B - 10A)$. D'altro canto $11C - B - 10A = 12C - 9A - (A + B + C)$ risulta un multiplo di 3, per cui m deve essere divisibile per 27. Le uniche possibilità sono pertanto $m = 27, 54, 81$ ed un semplice calcolo rivela che effettivamente verificano la curiosa proprietà che ha notato Veronica.

   Seconda soluzione. Osserviamo che $10(100C + 10A + B) - (100A + 10B + C) = 999C$, e per costruzione l'espressione $10(100C + 10A + B) - (100A + 10B + C)$ è uguale a $10 \cdot 4m - 3m = 37m$. Si ottiene perciò $37m = 999C$, ovvero $m = 27C$; da qui è immediato dedurre che i valori cercati sono $27, 54, 81$.

   Terza soluzione. Siccome $3m < 300$ si ha $0 \leq A \leq 2$, e similmente $0 \leq C \leq 3$. L'ipotesi ci dice che $0 = 4(3m) - 3(4m) = 4(100A + 10B + C) - 3(100C + 10A + B) = 370A + 37B - 296C$, e dividendo per 37 si ottiene $10A + B = 8C$. Questo significa che il numero formato dalle prime 2 cifre di ABC è pari a 8 volte la cifra delle unità; dal momento che, come già osservato, C non supera 3, le sole possibilità sono $000, 081, 162, 243$, che corrispondono ad $m = 0$ (non accettabile), $m = 27$, $m = 54$ e $m = 81$.

6. La risposta è **(E)**. Come prima cosa osserviamo che il primo della fila, davanti al quale ci sono 0 persone, è necessariamente un Cavaliere, perché dice per forza la verità. Dunque ci sono 999 abitanti ad Asip e almeno uno di loro è un Cavaliere. Concentriamoci sull'affermazione

riguardante la parità: il secondo può essere sia un Cavaliere (visto che davanti a lui ci sono 0 Furfanti), sia un Furfante (visto che davanti a lui c'è un Cavaliere). In entrambi i casi, però, il terzo della fila è del medesimo gruppo del secondo. Questo vale anche per gli abitanti in fila più indietro: chi è in un posto pari ha davanti a sé un numero dispari di Cavalieri e un numero pari di Furfanti e può quindi essere membro di entrambi i gruppi; chi invece è in un posto dispari è necessariamente del gruppo di colui che gli sta davanti. Questo ci dice, in particolare, che i furfanti sono in numero pari. Passiamo quindi a guardare le altre due affermazioni degli abitanti in seconda e terza posizione: siccome sono del medesimo gruppo o dicono entrambi la verità o mentono entrambi. Nel primo caso avremmo che i Cavalieri sono 666, mentre i Furfanti sono 333 (compatibile con almeno tre), ma ciò non è possibile, perché i Furfanti devono essere in numero pari. Supponiamo dunque che siano entrambi Furfanti, allora sono gli unici Furfanti, altrimenti il terzo della fila direbbe la verità. Quindi tutti gli altri 997 abitanti sono Cavalieri.

Seconda soluzione. Come sopra, gli abitanti sono 999. Supponiamo che la seconda persona in fila sia un Cavaliere: in tal caso i Cavalieri totali sarebbero 666 e i Furfanti 333. Consideriamo allora l'ultima persona in fila: se si trattasse di un Cavaliere, questi vedrebbe 333 Furfanti davanti a sé, impossibile (perché starebbe mentendo); ma non può trattarsi nemmeno di un Furfante, perché in tal caso vedrebbe davanti a sé 666 Cavalieri. Ne segue che il secondo abitante in fila mente, dunque è un Furfante, e quindi anche la persona dietro di lui deve mentire (vede davanti a sé un numero dispari di Furfanti e un numero dispari di Cavalieri). I Furfanti sono quindi al più due; in effetti, la configurazione in cui tutti tranne il secondo e terzo della fila sono Cavalieri (per un totale di 997 Cavalieri e due Furfanti) è compatibile con le affermazioni degli abitanti.

7. La risposta è **(C)**. Osserviamo dapprima che l'altezza del trapezio $ABCD$ è pari a 3: infatti, detto H il piede dell'altezza condotta da C ad AB, il triangolo HBC è retto in H e valgono le uguaglianze $BC = 5$ e $HB = \frac{1}{2}(AB - CD) = 4$, per cui (dal teorema di Pitagora) segue $HC = 3$ come affermato. Il poligono assegnato può essere decomposto nell'unione di quattro quadrati (aventi area complessiva $5^2 + 5^2 + 15^2 + 7^2 = 324$), il trapezio originale (avente area $\frac{(15+7)\cdot 3}{2} = 33$) e quattro triangoli, la cui area complessiva è esattamente pari al doppio dell'area del trapezio (ossia 66). Il motivo di quest'ultima affermazione è che il triangolo determinato da due segmenti di lunghezze ℓ_1, ℓ_2 formanti tra loro un angolo θ ha la stessa area di un triangolo determinato da due segmenti di lunghezze ℓ_1, ℓ_2 formanti tra loro un angolo $180° - \theta$: applicando ripetutamente questo fatto troviamo che le seguenti coppie di triangoli hanno la stessa area: AA_1A_2 e ABD, BB_1B_2 e ABC, CC_1C_2 e BCD, DD_1D_2 e ADC. Dal momento che la somma delle aree dei triangoli ABD e BCD è l'area del trapezio, e lo stesso vale per le aree di ADC e ABC, si ottiene come voluto che le aree dei triangoli $AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2, DD_1D_2$ sommano al doppio dell'area del trapezio. La risposta corretta è pertanto $324 + 33 + 66 = 423$.

8. La risposta è **(A)**. Siano a, b, c il numero di turni in cui rispettivamente Annalisa, Bruna e Cecilia sono in porta, mentre A, B, C il numero di turni in cui sono in campo. Se x è il numero totale di turni giocati, allora avremo $a = x - 12, b = x - 21, c = 8$ e $A = 12, B = 21, C = x - 8$. Ad ogni turno, uno tra a,b,c aumenta di uno, mentre due tra A, B, C aumentano di uno, quindi $A + B + C = 2(a + b + c)$ e sostituendo i valori precedentemente trovati si ottiene $x = 25$. Poiché $a = 13$, c'è un solo modo in cui Annalisa possa aver giocato, e cioè se comincia in porta e ci ritorna ogni due turni, quindi non facendo mai gol.

9. La risposta è **(D)**. Ogni soluzione di entrambe le equazioni dev'essere soluzione anche della loro differenza, che è

$$(x^2 + ax + 3b) - (x^2 + bx + 3a) = (a - b)x + 3(b - a) = (a - b)(x - 3) = 0.$$

Siccome a e b sono distinti, l'unica possibilità è $x = 3$, che è quindi l'unica possibile soluzione in comune delle due equazioni di partenza. In particolare 3 è soluzione anche di $x^2 + ax + 3b = 0$; sostituendo si ha $9 + 3a + 3b = 0$, da cui $3(a + b) = -9$ e quindi $a + b = -3$.

10. La risposta è **(C)**. Se a, b, x, y sono tutti maggiori o uguali a 2, allora $ab \geq a + b = xy \geq x + y = ab$, per cui ogni disuguaglianza deve essere un'uguaglianza e l'unica quaterna possibile è $(2, 2, 2, 2)$. Se invece uno dei quattro numeri è uguale ad 1, diciamo per esempio $b = 1$, allora

sostituendo l'uguaglianza $a = x + y$ in $a + 1 = xy$ si ottiene $(x-1)(y-1) = 2$, da cui si ha $x = 2, y = 3$ o viceversa. Una soluzione è dunque $(a, b, x, y) = (1, 5, 2, 3)$, e le altre sono ottenute da questa scambiando i ruoli di a, b, i ruoli di x, y, o i ruoli della coppia (a, b) e della coppia (x, y): si ottengono dunque altre otto soluzioni, ovvero $(1, 5, 2, 3)$, $(1, 5, 3, 2)$, $(5, 1, 2, 3)$, $(5, 1, 3, 2)$, $(2, 3, 1, 5)$, $(2, 3, 5, 1)$, $(3, 2, 1, 5)$, $(3, 2, 5, 1)$.

11. La risposta è **(E)**. Siano O, O_1, O_2 i centri di $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ rispettivamente. Dal momento che Γ_1, Γ_2 sono tangenti esternamente, la distanza O_1O_2 è uguale alla somma dei raggi di Γ_1, Γ_2, ovvero $O_1O_2 = 5$. Similmente, la distanza OO_1 è uguale alla differenza dei raggi di Γ e Γ_1 (ed è quindi uguale a $6 - 3 = 3$), e la distanza OO_2 è uguale a $6 - 2 = 4$. Dal momento che $OO_2^2 + OO_1^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = O_1O_2^2$, il triangolo triangolo OO_1O_2 è rettangolo in O, e il triangolo A_1OA_2 risulta rettangolo isoscele.

    Sia ora O' il centro della circonferenza circoscritta ad A_1AA_2. Il triangolo $A_1O'A_2$ è certamente isoscele su base A_1A_2; vogliamo dimostrare che è anche rettangolo in O', ovvero che O' è il simmetrico di O rispetto ad A_1A_2, ergo che $O'A_1 = O'A_2 = 6$.

    Abbiamo $\widehat{A_1O'A_2} = 2(180° - \widehat{A_1AA_2})$ (angolo al centro che insiste sullo stesso arco di $\widehat{A_1AA_2}$, ma dalla parte opposta); d'altra parte, un veloce calcolo di angoli comporta $180° - \widehat{A_1AA_2} = \widehat{A_1AO_1} + \widehat{A_2AO_2} = \widehat{AA_1O_1} + \widehat{AA_2O_2} = \widehat{AO_1O}/2 + \widehat{AO_2O}/2 = 45°$, il che implica precisamente l'ortogonalità voluta.

12. La risposta è **(C)**. Sia $S(m) = g(1) + g(2) + \cdots + g(m)$. Notiamo che

$$g(m) = \frac{m}{1 \cdot 3 \cdots (2m+1)} = \frac{1}{2}\frac{2m}{1 \cdot 3 \cdots (2m+1)} = \frac{1}{2}\frac{2m+1-1}{1 \cdot 3 \cdots (2m+1)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (2m+1)}\right).$$

    Chiamando con $h(m) = \frac{1}{2}\frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (2m+1)}$ abbiamo appena ottenuto che $g(m) = h(m-1) - h(m)$. Dunque $S(m) = g(1) + g(2) + g(3) + \cdots + g(m-1) + g(m) = h(0) - h(1) + h(1) - h(2) + h(2) - h(3) + \cdots + h(m-2) - h(m-1) + h(m-1) - h(m)$, cioè $S(m) = h(0) - h(m)$. Nel caso particolare,

$$S(30) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (2 \cdot 30 + 1)}\right).$$

    Tornando al caso generale, $S(30) = S < \frac{1}{2}$ poiché $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (2 \cdot 30+1)} > 0$; inoltre $\frac{1}{2}\frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (2 \cdot 30+1)} < \frac{1}{2 \cdot 61} < 0.01$ e dunque $S > 0.49$.

13. La risposta è 1009. Osserviamo innanzitutto che Angela può assegnare i polinomi $(x-1)(x-2), (x-1)(x-2)(x-3)(x-4), \cdots, (x-1)(x-2)\cdots(x-2017)(x-2018)$ (ovvero quelli di grado pari) al gruppo corrispondente a $p(x)$, e gli altri al gruppo corrispondente a $q(x)$. Con questa scelta, il rapporto $p(x)/q(x)$ è uguale a

$$\frac{(x-1)(x-2) \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \cdots}{(x-1) \cdot (x-1)(x-2)(x-3) \cdots} = (x-2)(x-4)\cdots(x-2018),$$

    che ha grado 1009. Per mostrare che non si riesce ad ottenere un grado più piccolo, osserviamo che ci sono esattamente 2017 fattori $(x-2)$, esattamente 2015 fattori $(x-4)$, ed in generale vi è un numero dispari di fattori $(x-k)$ per ogni k pari. Affinché il polinomio $q(x)$ divida il polinomio $p(x)$, il numero di fattori $x-k$ che compaiono in $p(x)$ deve essere maggiore o uguale del numero di fattori $x-k$ che compaiono in $q(x)$: se il numero totale di fattori $x-k$ è dispari, in $p(x)$ ne deve comparire almeno uno in più che in $q(x)$. Questo ragionamento mostra che nel rapporto $p(x)/q(x)$ deve comparire almeno un fattore $(x-2)$, almeno un fattore $(x-4)$, ..., almeno un fattore $(x-2018)$, e che quindi questo rapporto non può avere grado minore di 1009.

14. La risposta è 84. Stiamo cercando il più piccolo n che non divide alcuno dei numeri fra 1100 e 1159, né alcuno dei numeri fra 1200 e 1259. Osserviamo per prima cosa che, dati k numeri consecutivi, tra loro esiste esattamente un multiplo di k. Poiché sull'orologio compaiono tutti

i numeri fra 1100 e 1159, ogni numero n minore o uguale a 60 divide almeno uno dei numeri considerati, e quindi non va bene. Analogamente dato $60 \leq n \leq 80$, n divide esattamente due numeri fra 1100 e 1259 ma al più uno di essi può cadere fra i numeri che non compaiono sull'orologio (ovvero i numeri da 1160 a 119) perchè questi sono 40: quindi n divide sicuramente uno dei numeri che compaiono sull'orologio. Abbiamo così scartato tutti gli $n \leq 80$. D'altra parte un calcolo diretto ci dà che $81 \times 15 = 1215$, $82 \times 15 = 1230$, $83 \times 15 = 1245$ e quindi questi n non sono accettabili, mentre si ha che $84 \times 13 = 1092 < 1100$, $84 \times 14 = 1176 > 1159$ e $84 \times 15 = 1260 > 1259$.

15. (a) Scriviamo $n = 10a+b$ con a e b cifre decimali, ossia $1 \leq a \leq 9$ e $1 \leq b \leq 9$: per ipotesi $a = 0$ non è possibile (dato che $n > 10$), e $b = 0$ non è possibile perché in tal caso cancellando la prima cifra di n si troverebbe 0, che non divide n. Le condizioni sono allora che a divida $10a + b$, che è equivalente al fatto che a divida $10a + b - 10a = b$, e che b divida $10a + b$, equivalente a che b divida $10a + b - b = 10a$. Poniamo allora $b = ka$, dove k è un intero tale che $1 \leq k \leq 9$. Troviamo che $b = ka$ divide $10a$, ovvero che k divide 10: se $k = 1$ troviamo nove soluzioni in cui $a = b$, ossia $n = 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$. Se $k = 2$ allora $b < 10$ implica $a < 5$, e troviamo le soluzioni $n = 12, 24, 36, 48$. Infine, se $k = 5$, troviamo similmente l'unica soluzione $n = 15$.

    (b) Scriviamo $n = 10a + b$ con $1 \leq b \leq 9$ l'ultima cifra di n e $1 \leq a = (n - b)/10$ un intero (stavolta non necessariamente di una cifra). Cancellando l'ultima cifra, troviamo che a deve dividere $10a + b$, e quindi anche che a divide $(10a + b) - 10 \cdot a = b$. Siccome b è un numero positivo minore uguale a 9, allora anche a (che divide b) non può superare 9, dunque a è composto di una sola cifra e n si scrive con due cifre decimali come voluto. Le soluzioni sono allora solo quelle trovate al punto precedente, che vanno tutte bene perché non hanno cifre nulle.

16. Nel seguito chiameremo T_n e C_n, rispettivamente, la tessera e la casella con il numero n.

    (a) Se C_1 è libera, T_1 può essere spostata a sinistra oppure collocata su C_1, a seconda che sia già sulla griglia o no; lo stesso ragionamento vale per C_{2018}, quindi d'ora in poi supporremo che C_1 e C_{2018} siano entrambe occupate. Scelta una casella libera C_k, chiamiamo T_a e T_b le prime tessere che si incontrano partendo da C_k e procedendo rispettivamente verso sinistra e verso destra (da cui $a < b$): se $k \leq a$ si può spostare T_a a destra, così come se $k \geq b$ si può spostare T_b a sinistra; infine, se $a < k < b$, si può collocare T_k su C_k.

    (b) Dimostriamo per induzione su N che, giocando su una griglia $1 \times N$, Alice ha una strategia vincente la cui prima mossa consiste nel collocare T_1 su C_N (o equivalentemente, se c'è solo T_1 su C_N ed è il turno di Barbara, Alice ha una strategia vincente).

    Se $N = 2$, Barbara deve necessariamente spostare T_1 su C_1, dopodiché Alice vince collocando T_2 su C_2.

    Supponiamo ora che la tesi sia vera per un certo $N \geq 2$ e che si giochi su una griglia $1 \times (N+1)$: come prima, Barbara deve spostare T_1 su C_N, e Alice può rispondere collocando T_{N+1} su C_{N+1}: poiché quest'ultima tessera non può più essere spostata, il resto della partita si svolgerà sulla griglia $1 \times N$ ottenuta escludendo C_{N+1} (e si osserva facilmente che la presenza o meno di C_{N+1} non influisce sull'insieme delle mosse lecite). Su tale griglia, dopo le mosse descritte, c'è solo T_1 che si trova su C_N, ed è il turno di Barbara, ma per ipotesi induttiva questa configurazione è favorevole ad Alice.

17. Sia P' il simmetrico del punto P rispetto alla retta BC. Si noti che i punti A, H, P' sono allineati, dato che $\widehat{AHP'} = \widehat{AHP} + 2\widehat{PHC} = \widehat{AHP} + 2(90° - \widehat{AHP}/2) = 180°$.

    Ora, $\widehat{AP'C} = \widehat{HP'C} = \widehat{HPC}$ per simmetria, ma $\widehat{HPC} = \widehat{ABC}$ per ipotesi; ne deriva la ciclicità del quadrilatero $ABP'C$.

    Tale ciclicità comporta che $\widehat{BAC}$ sia supplementare di $\widehat{BP'C}$, che è congruente a $\widehat{BPC}$ per simmetria, e quindi $\widehat{BAC} = 180° - \widehat{BPC} = 180° - 130° = 50°$.

Seconda soluzione. Sia C' l'intersezione della retta CP con il lato AB; il quadrilatero $BHPC'$ è ciclico (poiché $\widehat{HPC} = \widehat{HBC'}$ per ipotesi, e dunque gli angoli opposti $\widehat{HBC'}$ e $\widehat{C'PH}$ sono supplementari).

Si noti inoltre che, detto 2θ l'angolo $\widehat{PHA}$, abbiamo $\widehat{PHC} = 90° - \theta = \widehat{C'HB}$; usando nuovamente l'identità $\widehat{HPC} = \widehat{HBC'}$ nei triangoli BAH e PCH, risulta per differenza $\widehat{BAH} = \widehat{PCH} = \widehat{C'CH}$. Ne segue che anche il quadrilatero $AC'HC$ è ciclico.

Vi sono ora vari modi per concludere con identità di angoli date dalla ciclicità; ad esempio, $\widehat{HBP} = \widehat{HC'P}$ per ciclicità di $BHPC'$ e $\widehat{HC'P} = \widehat{HAC}$ per ciclicità di $AC'HC$; ma quindi $\widehat{BAC} = \widehat{BAH} + \widehat{HAC} = \widehat{PCB} + \widehat{PBC} = 180° - \widehat{BPC} = 50°$.

Scale di valutazione degli esercizi dimostrativi

Esercizio 15

Si assegnino in ogni caso **15 punti** per una soluzione completa, anche con traccia diversa dalla soluzione proposta. Per soluzioni incomplete si propongono i seguenti punteggi parziali.
La parte (a) vale **7 punti**, suddivisi come segue:

- **2 punti** per chi fornisce l'elenco dei numeri che godono della proprietà descritta nel testo;
- **5 punti** per chi dimostra che la lista trovata è completa. Si consideri valida come dimostrazione una lista dei numeri fra 10 e 99 nella quale, per ogni numero che non verifica la proprietà del testo, sia indicato in qualche modo *perché* tale proprietà non è soddisfatta – per esempio, lo studente potrebbe aver cerchiato una cifra cancellando la quale si ottiene un numero che non è un divisore di quello di partenza. **Non** si consideri invece valida come dimostrazione una giustificazione quale *provando gli altri casi, si verifica facilmente che non ci sono altre soluzioni*. Si assegnino punteggi parziali come segue:
  - **1 punto** per chi scrive $n = 10a + b$;
  - **1 punto** per chi osserva che $a \mid n$, $b \mid n$;
  - **1 punto** per chi osserva che allora $a \mid b$, ovvero $b = ka$;
  - **1 punto** per chi deduce $k \mid 10$;
  - **1 punto** per chi conclude correttamente.

La parte (b) vale **8 punti**. Si assegnino **3 punti** a chi consideri specificamente il numero che si ottiene eliminando l'ultima cifra. I restanti **5 punti** sono assegnati per la conclusione, e suddivisi nella maniera seguente:

- 2 **punti** per chi osserva che (nella notazione della soluzione proposta) $a \mid b$;
- 3 **punti** per chi deduce che allora $a \leq b \leq 9$. Si assegnino solo 2 di questi 3 punti a chi si dimentichi di specificare come si stia utilizzando il fatto che $b \neq 0$ (in effetti, senza questa ipotesi esistono altre soluzioni, come ad esempio $n = 110$).

Esercizio 16

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema.
La parte (a) vale **7 punti**, suddivisi nel modo seguente:

- **1 punto** per chi osserva che si può assumere C_1 occupata.
- **1 punto** per chi osserva che si può assumere C_{2018} occupata.
- **2 punti** per chi determina la condizione per spostarsi in una direzione (ad esempio $a \geq k$).
- **1 punto** per chi determina la condizione per spostarsi anche nell'altra direzione (nell'esempio, $b \leq k$).
- **2 punti** per chi determina la condizione per collocare T_k sulla casella C_k considerata.

La parte (b) vale **8 punti**, così suddivisi:

- **4 punti** per chi individua la strategia vincente per Alice (nota bene, **non** si assegnino punti per chi dichiara che Alice ha una strategia vincente senza specificarla).
- **1 punti** per il caso base dell'induzione.
- **3 punti** per il passo induttivo.

Esercizio 17

Ovviamente si assegnino **15 punti** per una soluzione completa, anche con traccia diversa dalla soluzione proposta. Per soluzioni incomplete si propone di assegnare punteggi parziali secondo uno dei due schemi seguenti, a seconda del fatto che si avvicinino maggiormente alla prima o alla seconda soluzione ufficiale.

Prima soluzione:

- **5 punti** per la costruzione del simmetrico P' di P rispetto alla retta BC;
- **3 punti** per la dimostrazione del fatto che A, H, P' siano allineati;
- **5 punti** per la dimostrazione della ciclicità di $ABP'C$;
- **2 punti** per la conclusione.

Seconda soluzione:

- **3 punti** per la costruzione del prolungamento di CP e del punto C';
- **3 punti** per la dimostrazione della ciclicità di $BHPC'$;
- **6 punti** per la dimostrazione della ciclicità di $AC'HC$ (di cui **3 punti** per la sola dimostrazione dell'identità $\widehat{BAH} = \widehat{PCH}$, senza usarla per dimostrare la ciclicità);
- **3 punti** per la conclusione.