Unione Matematica Italiana
Scuola Normale Superiore

Progetto Olimpiadi della Matematica

GARA di FEBBRAIO

22 febbraio 2018

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:______________________ Cognome:______________________ Genere: F M

Indirizzo:______________________________________ Città:__________________

Scuola:______________________ Anno di corso: 1 2 3 4 5 Città:______________

Email:______________________________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

1. Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici, libri di testo e tavole numeriche. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; in particolare, è vietato l'uso di telefoni cellulari.
2. La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3. Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4. I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5. I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6. Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!
7. Per correttezza nei confronti di coloro che facessero la gara in momenti diversi della giornata, ti chiediamo di non diffondere informazioni sul testo e sulle risposte prima delle 20 di questa sera. Grazie!

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Da riempirsi a cura dell'insegnante:

Valutazione esercizi dimostrativi

15	16	17

Punteggio totale
(da foglio di calcolo)

EGMO 2018 in Italia! `http://www.egmo2018.org`
Per essere sempre aggiornati sulle novità del mondo olimpico, visitate il sito internet e il forum:
`http://olimpiadi.dm.unibo.it` `http://www.oliforum.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Una gara di matematica consta di 90 domande a risposta multipla. Camilla ha risposto a tutte le domande: quale dei seguenti **non** può essere il punteggio totalizzato da Camilla, sapendo che una risposta corretta vale 5 punti e una risposta sbagliata vale -1 punto?

   (A) -78 **(B)** 116 **(C)** 204 **(D)** 318 **(E)** 402

2. Quante sono le sequenze di numeri di lunghezza otto composte unicamente da 0 e 1 che contengono il codice 01?

   (A) 64 **(B)** 128 **(C)** 192 **(D)** 247 **(E)** 255

3. Sia ABC un triangolo isoscele con base $BC = 10$ e $AB = AC$. Si costruiscano esternamente sui suoi due lati obliqui altri due triangoli isosceli DAB e EAC, entrambi simili ad ABC, con $DA = DB$ e $EA = EC$. Sapendo che $DE = 45$, trovare la lunghezza di AB.

   (A) 15 **(B)** 20 **(C)** $9\sqrt{5}$ **(D)** 22.5 **(E)** Non è possibile determinarlo con i soli dati forniti.

4. Dati due numeri reali positivi a, b definiamo
$$a \star b = \frac{ab+1}{a+b}.$$
   Quanto vale $1 \star (2 \star (3 \star (\cdots (2017 \star 2018))))$?

   (A) 1/2018 **(B)** 1 **(C)** 2018/2017 **(D)** 1009 **(E)** 2018

5. Veronica osserva che $81 \cdot 3 = 243$ e $81 \cdot 4 = 324$ e si chiede quanti siano i numeri m con $10 \leq m \leq 99$ e tali che $3m = ABC$ e $4m = CAB$, con A, B e C cifre decimali (si considerano validi anche i casi in cui una o più delle cifre A, B, C siano uguali a zero).

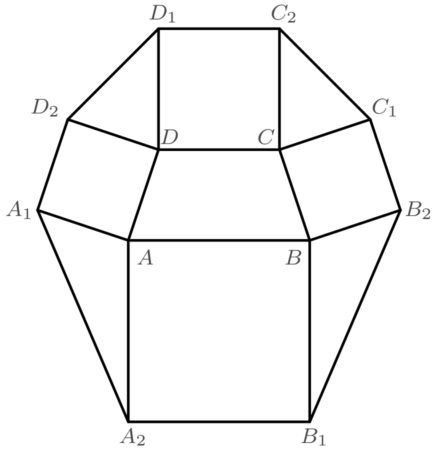
   (A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 6

6. Nel villaggio di Asip tutti gli abitanti appartengono ad uno dei due gruppi seguenti: i Cavalieri, che dicono sempre la verità, e i Furfanti, che mentono sempre. Oggi, per il censimento annuale, è arrivato dalla capitale il Gran Notaio e tutti gli abitanti si mettono in fila indiana davanti a lui. Ciascuno di essi dichiara: "Il numero di coloro che non appartengono al mio gruppo e sono in fila davanti a me è pari". Oltre a questo, i primi tre abitanti nella fila affermano, in ordine, quanto segue: "Nel villaggio ci sono 999 abitanti", "I Cavalieri sono esattamente 666", "Ci sono almeno tre Furfanti ad Asip". Quanti sono i Cavalieri ad Asip?

   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 501 **(D)** 666 **(E)** 997

7. $ABCD$ è un trapezio isoscele con lati di lunghezze $AB = 15$, $BC = DA = 5, CD = 7$. Sui lati di $ABCD$, esternamente ad $ABCD$, vengono costruiti quattro quadrati. Con riferimento alla figura, qual è l'area del poligono $A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2$?

   (A) $297 + 35\sqrt{5}$ **(B)** 396 **(C)** 423 **(D)** $105 + 144\sqrt{5}$ **(E)** $200\sqrt{5}$



8. Annalisa, Bruna e Cecilia giocano a calcio: una di loro sta in porta e le altre in campo. Chi fa gol rimane in campo, mentre chi non ha segnato si scambia con il portiere. Sapendo che Annalisa è stata in campo per 12 turni e Bruna per 21 turni, mentre Cecilia è stata in porta 8 volte, chi ha cominciato in porta?

   (A) Annalisa **(B)** Bruna **(C)** Cecilia **(D)** Annalisa o Bruna (ma sicuramente non Cecilia) **(E)** Può essere una qualunque delle tre amiche.

9. Siano a e b due numeri reali distinti. Si sa che le due equazioni

$$x^2 + ax + 3b = 0$$

$$x^2 + bx + 3a = 0$$

hanno una soluzione in comune: quali sono i possibili valori per la somma $a + b$?

(A) 0 o -3 **(B)** 0 o 3 **(C)** Soltanto 0 **(D)** Soltanto -3 **(E)** Esistono infiniti valori possibili

10. Quante sono le quaterne di interi positivi (a, b, x, y) tali che $x + y = a \cdot b$ e $a + b = x \cdot y$?

(A) 1 **(B)** 5 **(C)** 9 **(D)** 17 **(E)** Infinite

11. Sono date tre circonferenze Γ, Γ_1, Γ_2 di raggi rispettivamente 6, 3, 2. Γ_1 e Γ_2 sono tangenti esternamente in A, mentre Γ tange entrambe le altre circonferenze internamente, rispettivamente in A_1 ed A_2. Determinare il raggio della circonferenza circoscritta ad AA_1A_2.

(A) $2\sqrt{6}$ **(B)** 5 **(C)** $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ **(D)** $4 + \sqrt{3}$ **(E)** 6

12. Per ogni intero positivo n chiamiamo $f(n)$ il prodotto di tutti i numeri naturali dispari minori o uguali a $2n + 1$ (per esempio $f(4) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$). Poniamo poi $g(n) = \frac{n}{f(n)}$. Cosa si può dire della somma $S = g(1) + g(2) + \cdots + g(30)$?

(A) $S \leq 0.35$ **(B)** $0.35 < S \leq 0.49$ **(C)** $0.49 < S \leq 0.50$ **(D)** $0.50 < S \leq 0.51$ **(E)** $S > 0.51$

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Angela ha a disposizione i polinomi $x - 1$, $(x - 1)(x - 2)$, $(x - 1)(x - 2)(x - 3), \ldots$ fino a $(x - 1)(x - 2) \cdots (x - 2017)(x - 2018)$, e li divide in due gruppi. Detto $p(x)$ il prodotto dei polinomi del primo gruppo e $q(x)$ quello dei polinomi del secondo gruppo, Angela si accorge che il polinomio $p(x)$ divide il polinomio $q(x)$, e che il grado del quoziente $\frac{q(x)}{p(x)}$ è il più piccolo possibile: quanto vale tale grado?

14. Consideriamo un orologio digitale e i numeri formati dalle quattro cifre (ore e minuti): le 10:45 indicheranno il numero 1045. Quale è il più piccolo numero naturale che non divide alcuno dei numeri che compaiono fra le 11:00 e le 12:59?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

(a) Trovare tutti gli interi positivi n di due cifre che godano della seguente proprietà: entrambi gli interi che si ottengono cancellando una delle due cifre della rappresentazione decimale di n sono divisori (interi positivi) di n.

(b) Sia $n > 10$ un intero che si scrive con k cifre decimali, tutte diverse da zero. Supponiamo che ciascuno degli interi ottenuti cancellando una delle k cifre della rappresentazione decimale di n sia un divisore (intero positivo) di n. Mostrare che necessariamente $k = 2$.

Esempio. Per $n = 123$ si ha $k = 3$, e gli interi ottenuti cancellando cifre di n sono $23, 13, 12$.

SOLUZIONE:

Nome:________________________Cognome:____________________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Alice e Barbara hanno inventato il seguente gioco. Hanno una griglia 1×2018, con le caselle numerate da 1 a 2018 da sinistra verso destra, e 2018 tessere numerate anch'esse da 1 a 2018. La partita inizia con la griglia vuota, e le due giocatrici si alternano nel fare mosse; la giocatrice di turno può scegliere fra:

- selezionare una tessera non ancora collocata sulla griglia e porla su una casella libera, a patto che i numeri sulle tessere collocate, se letti da sinistra verso destra, siano in ordine crescente;
- selezionare una tessera già collocata sulla griglia e spostarla in una casella adiacente in modo che la tessera si avvicini alla casella che reca lo stesso numero della tessera, a patto che la casella di arrivo sia libera (esempio: se la tessera col numero 7 si trova sulla casella numero 12, la si può spostare a sinistra, ma non a destra; se invece una tessera si trova già nella casella col suo stesso numero, non potrà più essere spostata).

(a) Dimostrare che a ogni turno, se le tessere non sono tutte sulla griglia, esiste una mossa lecita.

(b) Se inizia Alice e vince chi colloca l'ultima tessera, chi ha una strategia vincente?

SOLUZIONE:

Nome:____________________Cognome:____________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Siano ABC un triangolo e P un suo punto interno. Sia H il punto sul lato BC tale che la bisettrice dell'angolo $\widehat{AHP}$ è perpendicolare alla retta BC. Sapendo che $\widehat{ABC} = \widehat{HPC}$ e $\widehat{BPC} = 130^o$, determinare la misura dell'angolo $\widehat{BAC}$.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________