XXXIV Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico, 4 maggio 2018

1. Una bottiglia a forma di cono poggia sulla sua base. Viene riempita d'acqua finché il livello del liquido non raggiunge 8 centimetri misurati in verticale sotto il vertice del cono. Se ora si capovolge la bottiglia, senza cambiare la quantità di acqua al suo interno, lo spazio che rimane vuoto nella parte superiore del cono rovesciato è alto 2 centimetri.

Quanto è alta la bottiglia?

Soluzione: Chiamiamo h l'altezza in centimetri della bottiglia ed r il raggio della base del cono. Il volume della bottiglia è uguale a $\frac{\pi r^2 h}{3}$. Mentre la bottiglia poggia sulla sua base, l'acqua occupa un volume pari alla differenza tra il volume della bottiglia e quello del cono di altezza 8 centimetri ottenuto sezionando la bottiglia con il piano a livello del liquido. Dato che il piano è parallelo alla base della bottiglia, quest'ultimo cono è simile alla bottiglia. Il rapporto di similitudine è uguale al rapporto tra le due altezze, che è $8/h$. Pertanto il volume occupato dall'acqua è

$$\frac{\pi r^2 h}{3} - \frac{\pi(\frac{8r}{h})^2 \cdot 8}{3}.$$

Dopo aver capovolto la bottiglia l'acqua occupa il volume di un cono di altezza $h-2$ simile alla bottiglia. Pertanto il volume occupato dall'acqua è

$$\frac{\pi(\frac{(h-2)r}{h})^2(h-2)}{3}.$$

Uguagliando le due espressioni del volume occupato dall'acqua dopo averle moltiplicate per $\frac{3h^2}{\pi r^2}$ otteniamo

$$h^3 - 8^3 = (h-2)^3,$$

che è equivalente a

$$h^2 - 2h - 84 = 0.$$

L'ultima uguaglianza è un'equazione di secondo grado in h con un'unica soluzione positiva, che è $h = 1+\sqrt{85}$.

Seconda soluzione: Si noti che i seguenti tre solidi sono simili: il cono costituito dall'intera bottiglia, il cono privo di acqua nel caso in cui la bottiglia sia poggiata sulla sua base, il cono occupato dall'acqua nel caso in cui la bottiglia sia rovesciata. I rapporti di similitudine fra i tre coni sono dati dai rapporti delle altezze: detta h la misura in centimetri dell'altezza della bottiglia, si tratta (nell'ordine) di $h : 8 : h-2$. Poiché il rapporto fra i volumi di due solidi simili è dato dal cubo del rapporto di similitudine, i volumi sono invece in proporzione $h^3 : 8^3 : (h-2)^3$. Detto V il volume della bottiglia, imporre che il volume dell'acqua sia lo stesso nei due casi discussi equivale a considerare l'equazione $V(1-\frac{8^3}{h^3}) = V\frac{(h-2)^3}{h^3}$; questa, moltiplicando per h^3, diventa $h^3 - 512 = h^3 - 6h^2 + 12h - 8$, ovvero $h^2 - 2h - 84 = 0$, che ha come unica soluzione positiva $h = 1 + \sqrt{85}$.

2. Sia ABC un triangolo acutangolo, con $AB \neq AC$ e con baricentro G. Detto M il punto medio di BC, consideriamo la circonferenza Γ di centro G e raggio GM e denotiamo con N l'intersezione di Γ con BC diversa da M. Sia ora S il punto simmetrico di A rispetto ad N, cioè il punto sulla retta AN tale che $AN = NS$ ($A \neq S$).

Dimostrare che GS è perpendicolare a BC.

Soluzione: Sia X il punto medio del segmento MN. Ovviamente GX è perpendicolare a BC. Se dimostriamo che anche XS è perpendicolare a BC, abbiamo che G, X, S sono allineati e dunque GS è perpendicolare a BC.

Tracciamo l'altezza del triangolo ABC con vertice in A; chiamiamo H la sua intersezione con BC. I triangoli rettangoli AHM e GXM sono ovviamente simili e, poiché G è il baricentro di ABC, abbiamo $AM = 3GM$, da cui $HM = 3XM$. Ne segue che $HN = NX = XM$.

Siccome $\widehat{HNA} = \widehat{XNS}$ in quanto angoli opposti al vertice, $AN = NS$ per costruzione e $XN = NH$ per quanto appena dimostrato, i triangoli ANH e SNX sono congruenti, e quindi l'angolo $\widehat{SXN}$ è retto come voluto.

Seconda soluzione: Usando le coordinate cartesiane possiamo supporre, senza perdita di generalità, che le coordinate dei vertici A, B, C siano

$$A = (a, b), \quad B = (0, 0), \quad C = (c, 0) .$$

Le coordinate di G sono allora $(\frac{a+c}{3}, \frac{b}{3})$. Con un semplice calcolo si vede poi che $M = (\frac{c}{2}, 0)$ ed $N = (\frac{4a+c}{6}, 0)$. Infine, le coordinate di S sono $(\frac{a+c}{3}, -b)$, dunque G ed S giacciono sulla retta di equazione $x = \frac{a+c}{3}$, che è perpendicolare a BC, la cui equazione è $y = 0$.

Terza soluzione: Sia P il punto d'intersezione diverso da M fra la circonferenza e la mediana AM. Per il teorema della mediana sappiamo che $AG = 2GM$; d'altra parte $PG = GM$ in quanto entrambi raggi e dunque $AP = PG = GM$. Notiamo che, poiché insiste sul diametro PM, l'angolo $\widehat{PNM}$ è retto. Inoltre, essendo P punto medio di AG ed N punto medio di AS, i triangoli APN ed AGS sono simili e le rette PN e GS risultano parallele: GS è quindi, così come PN, ortogonale a BC.

3. Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ interi positivi. Supponiamo che, nella loro scrittura decimale, nessuno degli x_i sia un "prolungamento" di un altro x_j. Per esempio, 123 è un prolungamento di 12, e 459 è un prolungamento di 4, ma 134 non è un prolungamento di 123.

Dimostrare che

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} < 3.$$

Soluzione: Sia $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e sia k il massimo numero di cifre decimali degli elementi di S. Dimostriamo la proprietà richiesta per induzione su k.

Se $k = 1$, allora $S \subseteq \{1, \ldots, 9\}$, e dunque la somma degli inversi degli elementi di S è minore o uguale a

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9} = \frac{7129}{2520} < 3 .$$

Supponiamo ora la tesi vera per k e dimostriamola per $k+1$. Raggruppiamo tutti i numeri di S con esattamente $k+1$ cifre in sottoinsiemi in cui le prime k cifre del numero siano le stesse. Ossia, ogni sottoinsieme consiste di elementi della forma $10a+b$, dove a è un intero positivo fissato con k cifre decimali, mentre b può assumere un qualsiasi numero di valori compresi fra 0 e 9.

L'idea è ora di cambiare S nell'insieme S' che si ottiene sostituendo a ciascun gruppo di questi numeri di $k+1$ cifre il relativo numero di k cifre a.

Osserviamo che:

(a) il massimo numero di cifre degli elementi dell'insieme S' è diventato k;

(b) l'insieme S' ha le stesse proprietà di S, ossia nessun numero di S' è il prolungamento di un altro numero dello stesso insieme: infatti, se a fosse il prolungamento di un numero $a' \in S'$ (dove il numero di cifre di a' dovrebbe essere necessariamente minore di k e quindi appartenere anche ad S), allora anche ogni numero della forma $10a + b \in S$ sarebbe un prolungamento di a'; inoltre, poiché in s' si sono tolti da S tutti i prolungamenti di a, non esiste in S' un prolungamento di a;

(c) la somma degli inversi degli elementi di S è minore o uguale alla somma degli inversi degli elementi di S', in quanto

$$\sum_{b=0}^{9} \frac{1}{10a+b} \leq 10\frac{1}{10a} = \frac{1}{a}.$$

Siccome, per ipotesi induttiva, la somma degli inversi degli elementi di S' è minore di 3, lo stesso vale anche per la somma degli inversi degli elementi di S.

4. Sia N un intero maggiore di 1. Chiamiamo x il più piccolo intero positivo con la seguente proprietà: esiste un intero positivo y strettamente minore di $x-1$ tale che x divide $N+y$. Dimostrare che x è il doppio di un numero primo o una potenza di un numero primo.

Nota: si ricorda che x è una potenza di un numero primo se esistono un primo p ed un intero positivo $n \geq 1$ tali che $x = p^n$.

Soluzione: Si ricorda che la scrittura $a \mid b$ significa che a divide b. Diciamo che una coppia di interi positivi (x, y) è *bella* se valgono $x \mid N+y$ e $0 < y < x-1$.

La prima osservazione è che, dato un qualunque intero positivo x', fra x' interi consecutivi c'è un multiplo di x', dunque è sicuramente possibile scegliere (in maniera unica) un intero y' nell'intervallo $\{0, 1, \ldots, x'-1\}$ in modo che $x' \mid N+y'$. La coppia (x', y') è allora bella purché y' sia diverso da 0 e da $x'-1$. In maniera equivalente, x' è primo membro di una coppia bella se e solo se x' non divide né $N+0 = N$ né $N+(x'-1)$; questa seconda condizione è equivalente al fatto che x' non divida $N-1$. Consideriamo ora la coppia bella (x, y) per la quale x è minimo. Per quanto osservato sopra, x non può dividere né N, né $N-1$. La conclusione è che esiste una qualche potenza di primo, diciamo p^k, che divide x ma non N, e similmente esiste una potenza di primo, diciamo q^h (non necessariamente diversa da p^k), che divide x ma non $N-1$. Infatti, se ogni potenza di primo che divide x dividesse anche N, allora x stesso dividerebbe N per fattorizzazione unica, ma abbiamo già visto che questo non può capitare; il medesimo ragionamento si applica ad $N-1$. Ora osserviamo che, se q^h non divide N, allora q^h non divide né N né $N-1$, e quindi, per quanto già osservato, q^h è primo membro di una coppia bella. D'altro canto q^h divide x, quindi certamente $q^h \leq x$, e siccome x è il minimo possibile si deve avere che $x = q^h$ è una potenza di un primo, come voluto. Similmente, se p^k non divide $N-1$, allora $x = p^k$ e abbiamo finito. Possiamo quindi supporre che $p^k \mid N-1$ e $q^h \mid N$; in tal caso p^k e q^h sono distinte (ricordiamo che p^k non divide N) e siccome entrambe dividono x si ottiene $x \geq 2p^k \geq 2p, x \geq 2q^h \geq 2q$. Per concludere, dimostriamo che in questo caso uno dei numeri $2p, 2q$ è primo membro di una coppia bella, e quindi, per minimalità, deve coincidere con x. In effetti, se N è pari $2p$ funziona: chiaramente $2p$ non può dividere $N-1$, che è dispari, e p (e a maggior ragione $2p$) non può dividere N, perché per ipotesi p divide $N-1$ e nessun primo divide due numeri consecutivi. Similmente, se N è dispari allora $2q$ funziona: $2q$ (pari) non divide N (dispari), e $2q$ non divide $N-1$ perché q divide N.

5. Dato un numero reale x compreso fra 0 e 1, consideriamo la sua scrittura decimale $0, c_1c_2c_3\ldots$ Chiamiamo $B(x)$ l'insieme delle diverse sottosequenze di sei cifre consecutive che compaiono nella sequenza $c_1c_2c_3\ldots$

Per esempio, $B(1/22) = \{045454, 454545, 545454\}$.

Determinare il minimo numero di elementi di $B(x)$ al variare di x fra i numeri irrazionali compresi fra 0 e 1 (ossia quelli il cui sviluppo decimale non è né finito, né periodico da un certo punto in poi.)

Soluzione: Il numero cercato è sette. Per dimostrarlo facciamo vedere che (a) esiste un numero irrazionale x tale che $B(x)$ non ha più di sette elementi, e che (b) ogni numero reale y tale che $B(y)$ ha sei o meno elementi è razionale.

Parte (a). Consideriamo un numero x fatto così. La prima cifra dello sviluppo decimale di x è un 1, questo è seguito da cinque cifre 0, poi c'è un altro 1, seguito però da sei zeri, poi un altro 1 seguito da sette zeri, e, via dicendo, lo sviluppo decimale di x è costituito da cifre 1 intervallate da sequenze di zeri di lunghezza crescente. Chiaramente

$$B(x) = \{000000, 000001, 000010, 000100, 001000, 010000, 100000\}$$

Inoltre x è irrazionale. Infatti, se x fosse razionale, allora, da una certa cifra in poi, diciamo la k-esima, il suo sviluppo decimale sarebbe periodico. Sia l la lunghezza del periodo. Siccome lo sviluppo di x contiene infinite sequenze di zeri di lunghezza maggiore di $2l$, una di queste dovrebbe capitare dopo la k-esima cifra e in particolare conterrebbe un periodo completo. Ne segue che il periodo dovrebbe essere costituito da l zeri, la qual cosa contraddice il fatto che lo sviluppo di x contiene infiniti uni.

Parte (a), alias. Indichiamo con $[x]_i$ la i-esima cifra dopo la virgola del numero x compreso fra 0 e 1. Consideriamo un qualunque numero irrazionale α in questo intervallo, per esempio $\alpha = \sqrt{2}/2$. Per $i = 1\ldots6$ e $j = 0\ldots9$ definiamo i numeri $\alpha_{i,j}$ come segue

$$[\alpha_{i,j}]_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 6n+i \text{ per qualche } n \text{ e } [\alpha]_k < j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sommando questi numeri in colonna, si vede subito che, delle k-esime cifre, precisamente $[\alpha]_k$ valgono 1, le altre 0. Dunque α è la somma degli $\alpha_{i,j}$. Di conseguenza, almeno uno di questi numeri, che chiamiamo x, è irrazionale. D'altro canto, le cifre di tutti gli $\alpha_{i,j}$ sono solo zeri e uni, e c'è al più un uno ogni sei cifre consecutive. Quindi

$$B(x) \subseteq \{000000, 000001, 000010, 000100, 001000, 010000, 100000\}$$

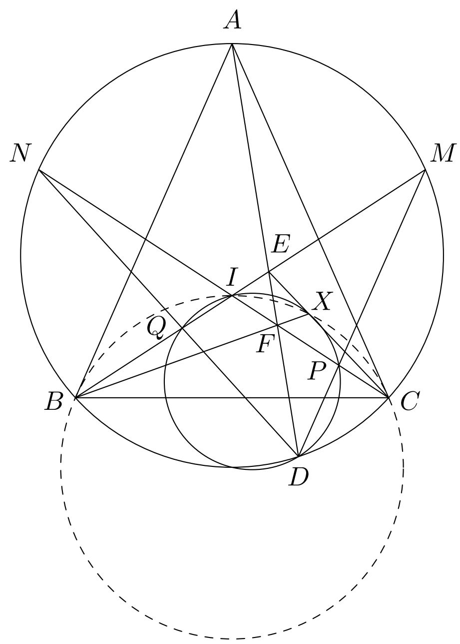
Parte (b). Sia $B_k(y)$ l'insieme delle sottosequenze di lunghezza k della espansione decimale di y. Dimostreremo per induzione su k che, se $B_k(y)$ ha k o meno elementi, allora y è razionale. Questo chiaramente conclude perché $B(y) = B_6(y)$.

Il caso $k = 1$ è immediato. Supponiamo di conoscere l'enunciato per k e dimostriamo che esso vale per $k+1$. Ci baseremo sul fatto che ogni sottosequenza delle cifre di y di lunghezza $k+1$ inizia con una sottosequenza, che chiameremo corrispondente, di lunghezza k. Viceversa, data una sottosequenza di lunghezza k, essa dovrà corrispondere ad almeno una sottosequenza di lunghezza $k+1$. Quindi, in particolare, $B_k(y)$ ha al più tanti elementi quanti $B_{k+1}(y)$. Fissato y, studiamo il numero di elementi di $B_k(y)$. Se questo numero è k o meno, l'enunciato segue dal caso k. D'altro canto, il numero degli elementi di $B_k(y)$ non può eccedere $k+1$, altrimenti anche $B_{k+1}(y)$ avrebbe più di $k+1$ elementi, contrariamente all'ipotesi. Quindi possiamo assumere che sia $B_k(y)$ sia $B_{k+1}(y)$ abbiano precisamente $k+1$ elementi. La corrispondenza sopra descritta è dunque biunivoca. Detto altrimenti, ogni cifra successiva alla k-esima dello sviluppo di y è univocamente determinata dalle k precedenti. Dal momento che ci sono $k+1$ possibili sottosuccessioni di k cifre, devono esistere i e j tali che $i < j$ e le k cifre dello sviluppo decimale di y successive alla i-esima coincidono con le k cifre successive alla j-esima. Ma allora l'intero sviluppo successivo alla i-esima cifra deve coincidere con lo sviluppo dopo la j-esima. Questo signfica che le cifre fra la i-esima esclusa e la j-esima inclusa si ripetono periodicamente, quindi y è razionale.

6. Sia ABC un triangolo tale che $AB = AC$ e sia I il suo incentro. Sia Γ la circonferenza circoscritta ad ABC. Le rette BI e CI intersecano Γ in due nuovi punti, denotati rispettivamente M ed N. Sia D un altro punto di Γ, giacente sull'arco BC che non contiene A, e siano E, F, rispettivamente, le intersezioni di AD con BI e con CI. Siano infine P e Q, rispettivamente, le intersezioni di DM con CI e di DN con BI.

(i) Dimostrare che i punti D, I, P, Q giacciono su una medesima circonferenza Ω.

(ii) Dimostrare che le rette CE e BF si intersecano su Ω.



Soluzione: Chiamiamo β l'angolo $\widehat{CBA}$ e X l'intersezione tra le rette BF e CE; intenderemo gli angoli come orientati nel corso della soluzione.

Parte (a). Abbiamo $\widehat{QIP} = \widehat{BIC} = 180° - \widehat{ICB} - \widehat{CBI} = 180° - \beta/2 - \beta/2 = 180° - \beta$; d'altra parte, $\widehat{PDQ} = \widehat{MDA} + \widehat{ADN} = \widehat{MBA} + \widehat{ACN} = \beta/2 + \beta/2 = \beta$ (dove la seconda uguaglianza è dovuta al fatto che A, M, C, D, B, N si trovano su Γ) da cui D, Q, I, P risultano conciclici.

Parte (b). Si noti che B, I, F, D sono conciclici, poiché come visto sopra $\widehat{BIF} = \widehat{BIC} = 180° - \beta$, mentre $\widehat{FDB} = \widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \beta$. Mostriamo che anche I, E, C, D sono conciclici; in effetti $\widehat{BCD} = \widehat{BMD}$ (insistono sullo stesso arco di Γ) e $\widehat{ICB} = \beta/2 = \widehat{MBA} = \widehat{MDA} = \widehat{MDE}$; per il teorema dell'angolo esterno applicato al triangolo DEM, $\widehat{IED} = \widehat{MDE} + \widehat{EMD} = \widehat{ICB} + \widehat{BCD} = \widehat{ICD}$, da cui la ciclicità voluta.
A questo punto è facile mostrare come I, X, C, B siano conciclici anch'essi: abbiamo $\widehat{ECI} = \widehat{EDI}$ per ciclicità di $ECDI$ e $\widehat{FDI} = \widehat{FBI}$ per ciclicità di $FDBI$, da cui $\widehat{XCI} = \widehat{XBI}$.

Per dimostrare la tesi del problema dedurremo ora dalla ciclicità di cui sopra che $\widehat{IXD} = \widehat{IPD}$. Per la ciclicità di $IXCB$ abbiamo $\widehat{EXI} = 180° - \widehat{IXC} = \widehat{CBI} = \beta/2$; possiamo inoltre ottenere $\widehat{BXC} = \widehat{BIC} = 180° - \beta$, mentre $\widehat{CDF} = \beta$, da cui la ciclicità di $DFXC$ e l'identità $\widehat{DFC} = \widehat{DXC}$. Per differenza rispetto alla somma degli angoli interni del triangolo DFP si ottiene ora $\widehat{IPD} = 180° - \widehat{PDF} - \widehat{DFC} = 180° - \beta/2 - \widehat{DXC} = 180° - \widehat{EXI} - \widehat{DXC} = \widehat{IXD}$, come voluto.

Seconda soluzione: Mostriamo una maniera alternativa di dimostrare la ciclicità di $IXCB$ e una seconda possibile conclusione a partire da questo fatto.

Siano Y, Z rispettivamente l'intersezione delle rette DM e AC e l'intersezione delle rette DN e AB. I punti Z, B, D, E sono conciclici in quanto $\widehat{EDZ} = \widehat{ADN} = \widehat{ACN} = \beta/2 = \widehat{EBZ}$; sia Γ_1 la circonferenza cui appartengono tutti. Analogamente i punti Y, C, D, F si trovano su una stessa circonferenza Γ_2. Detto X' il punto d'intersezione diverso da D fra le circonferenze Γ_1 e Γ_2 abbiamo $\widehat{BX'D} = \widehat{BED}$ (dato che B, E, X', D appartengono a Γ_1). D'altra parte, considerando archi di Γ_2, si ottiene $\widehat{FX'D} = \widehat{FCD}$; per differenza nel triangolo FCD si ha $\widehat{FCD} = 180° - \widehat{CDF} - \widehat{DFC} = 180° - \widehat{CDA} - \widehat{EFI} = 180° - \widehat{FIE} - \widehat{EFI}$, dove abbiamo usato il fatto che $\widehat{FIE} = \widehat{CBI} + \widehat{ICB} = \beta$; risulta perciò, per differenza nel triangolo FIE, $\widehat{FCD} = \widehat{IEF}$. In conclusione abbiamo $\widehat{IEF} = \widehat{BX'D} = \widehat{FX'D}$, da cui B, F, X' risultano allineati. Si dimostra similmente l'allineamento di C, X', E, da cui si deduce $X \equiv X'$.

A questo punto è chiaro il fatto che B, I, X, C appartengano a una stessa circonferenza Γ_3, in quanto $\widehat{BXC} = \widehat{BXD} + \widehat{DXC} = \widehat{BED} + \widehat{DFC} = \widehat{IEF} + \widehat{EFI} = \widehat{BIC}$.

Possiamo inoltre notare come la retta AC sia tangente a Γ_3 (dato che $\widehat{ACI} = \beta/2 = \widehat{CBI}$). Consideriamo ora l'angolo $\widehat{PDX}$; da Γ_2 si ottiene $\widehat{PDX} = \widehat{YCX}$; grazie alla tangenza della retta AC a Γ_3, si ha $\widehat{YCX} = \widehat{CIX}$. Abbiamo dunque mostrato $\widehat{PDX} = \widehat{PIX}$, cioè la tesi.