A - Polinomi 1

* $x^3+4x^2-32x+5$ $\qquad a(x)=\sum_{i=0}^{d} a_i x^i$

<u>coefficienti</u>

a_i stanno in un insieme su cui posso fare somme e prodotti, ad es. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ ....

$\mathbb{R}[x] = \{$polinomi a coeff. reali$\}$ $\qquad \mathbb{Q}[x]$ ...

$x^3 \cdot x^2 = x^5$ ...

<u>Valutare</u> un polinomio $p(x) \to p(5)$

$p(5)= 5^3+4\cdot 5^2-3\cdot 2\cdot 5+5$

<u>Grado</u>: la più alta potenza di x che ha un coeff. <u>diverso</u> da zero.

<u>Occhio</u>: $\qquad a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$$

$$f_d g_e x^{d+e} + \ldots = (f_d x^d + \ldots)(g_e x^e + \ldots)$$

$$\deg(f(x)+g(x)) \leq \max(\deg(f(x)), \deg(g(x)))$$

$(x^3+x)+(5-x^3)$ $\qquad \deg(0) =$ non definito, oppure $-\infty$

<u>Teo</u>: divisione euclidea:

Dati $a(x), b(x)$ polinomi, esistono $q(x), r(x)$ tali che $a(x) = b(x)\,q(x) + r(x)$

$\deg(r(x)) < \deg(b(x))$ (oppure $r(x)=0$)

$x^4+3x^3 : 1 \cdot x^2+1$

$x^2(x^2+1)+3x(x^2+1)-1\cdot(x^2+1)$ ha grado $< \deg(x^2+1)$

$q(x) = x^2+3x-1$ $\quad r(x) = 3x-1$

$x^4+3x^3 : 2x^2+1$

$\frac{1}{2}x^2(2x^2+1)$

[def: $p(x)$ monico se il coeff. di $x^{\deg(p(x))}$ è 1]

Divisione per un $b(x)$ monico di grado 1:

$p(x) = (x-a)q(x)+r(\cancel{x})$ ← valutiamo in a:

$\hookrightarrow$ costante

$p(a) = \underbrace{\cancel{(a-a)q(a)}}_{=0} + r$

$\Rightarrow p(a)$ è uguale al resto nella divisione $p(x) : x-a$

In part., se $p(a)=0$, allora $p(x)=(x-a)q(x)$

$\deg(q(x)) = \deg(p(x))-1$

Teo. di Ruffini

ES: Dato $p(x)$ t.c. $p(1)=0$, $p(5)=0$

$p(x) = (x-1)\, q(x)$ valuto in 5: $0 = p(5) = (5-1)\, \underbrace{q(5)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}}$

$\Rightarrow q(x) = (x-5)\, t(x) \Rightarrow p(x) = (x-1)(x-5)\, t(x)$

$p(1) = 5, \quad p(3) = 5$

$$\Rightarrow p(x) - 5 = (x-1)(x-3)\, t(x)$$

$$p(x) = \sum_i p_i x^i$$

Principio di identità dei polinomi:

Dati due polinomi $p(x), q(x)$ di grado $\leq d$, se esistono $d+1$ numeri distinti $a_1, a_2, \dots a_{d+1}$ tali che $p(a_1) = q(a_1)$

$\vdots$

$p(a_{d+1}) = q(a_{d+1})$

allora $p(x) = q(x)$ (come polinomi, cioè, coefficiente per coefficiente)

Dim: $\underbrace{p(x) - q(x)}_{\substack{\text{gradi: } \geq \\ d}} \overset{??}{=} \underbrace{(x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{d+1}) \cdot r(x)}_{\substack{\geq \\ d+1+\deg(r(x))}}$

Assurdo, a meno che $r(x) = 0 \Rightarrow p(x) = q(x)$ $\square$
