A - Polinomi 2

Titolo nota 17/10/2018

Si dice che $p(x) \mid q(x)$ se il resto nella divisione è zero.

$$5(x+1) \mid x^2-1 \quad (\text{come polinomi in } \mathbb{R}[x])$$

$$5(x+1) \cdot \frac{1}{5}(x-1) = x^2-1$$

Algoritmo euclideo per polinomi:

ES: $\mathrm{mcd}(x^4-1,\ x^3+1)$

$$x^4-1 = (x^3+1)\cdot \underbrace{x}_{\text{quoz.}} + \underbrace{(-x-1)}_{\text{resto}}$$

$$x^3+1 = (-x-1)\underbrace{(-x^2+x-1)}_{\text{quoz.}} + \underbrace{0}_{\text{resto}}$$

$\Rightarrow$ $-x-1$ (oppure $x+1$) è l'mcd fra x^4-1, x^3+1.

Teo (Bézout per polinomi):

Dati $a(x), b(x)$ con massimo comun divisore $r(x)$, esistono $s(x), t(x)$ polinomi tali che

$$a(x)s(x)+b(x)t(x)=r(x)$$

ES: $x+1 = (-1)\cdot(x^4-1) + x\cdot(x^3+1)$.

Teo (fondamentale dell'algebra)

Dato $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ diverso da zero, $p(x)$ si fattorizza in un prodotto di fattori di grado 1, cioè esistono $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_d$ $(d = \deg(p(x)))$ (non per forza distinti) tali che

$$p(x) = \underset{\in \mathbb{C}}{p_d} \cdot (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \cdots (x-\lambda_d)$$

(I λ_i sono esattamente quei numeri complessi per cui $p(\lambda_i) = 0$ (zeri o radici di un polinomio)

Forma alternativa:

$$p(x) = p_d \cdot (x-\lambda_1)^{m_1} (x-\lambda_2)^{m_2} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k} \quad (\lambda_i \text{ distinti})$$

m_i = molteplicità

Per un polinomio a coeff. reali, non è vero:

ad esempio x^2+4 non si scrive come $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$

Però: posso vederlo come polinomio in $\mathbb{C}[x]$,

e $(x+2i)(x-2i) = x^2+4$

Lemma: se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ t.c. $p(\lambda) = 0$, allora $p(\bar{\lambda}) = 0$

Dim:

$$0 = \bar{0} = \overline{p_d \lambda^d + p_{d-1} \lambda^{d-1} + \dots + p_1 \lambda + p_0} =$$

$$= p_d \bar{\lambda}^d + \dots + p_1 \bar{\lambda} + p_0 = p(\bar{\lambda}).$$

(Coroll.) λ e $\bar{\lambda}$ hanno la stesse molteplicità

$$p(x) = (x-\lambda)(x-\bar{\lambda})\underline{q(x)}$$

<u>Lemma:</u> $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ si fattorizza come

$$p(x) = p_d(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k)(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)(x^2+\alpha_2 x+\beta_2)\cdot$$
$$\cdots \cdot (x^2+\alpha_{\frac{d-k}{2}} x+\beta_{\frac{d-k}{2}})$$

(con λ_i reali, e i polinomi $x^2+\alpha_i x+\beta_i$ non hanno radici reali)

<u>Dim:</u>

$$p(x) = \underbrace{(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k)}_{\text{radici reali}}(x-\mu_1)(x-\bar{\mu}_1)(x-\mu_2)(x-\bar{\mu}_2)$$
$$\cdots\underbrace{(x-\mu_{\frac{d-k}{2}})(x-\bar{\mu}_{\frac{d-k}{2}})}_{\text{radici non reali}}$$

A questo punto, $x^2+\alpha_i x+\beta_i = (x-\mu_i)(x-\bar{\mu}_i)$

(<u>oss</u>: α_i, β_i sono reali.)